Riassunto

Lo spazio delle funzioni a variazione limitata, usualmente denotato con BV, ha avuto ed ha tuttora un ruolo importante in numerosi problemi nell'ambito del Calcolo delle Variazioni. Le principali proprietà che fanno di questo spazio l'ambiente adatto in cui formulare problemi variazionali riguardano i risultati di compattezza, relativi a funzionali integrali a crescita lineare nel gradiente, e la possibilità di supporre che tali funzioni ammettano delle ipersuperfici di discontinuità, caratteristica importante in numerosi problemi fisici e di natura geometrica. Il prototipo dei funzionali integrali a crescita lineare nel gradiente è il funzionale dell'area, mentre, nell'ambito dei problemi variazionali con discontinuità, il primo successo della teoria risale alla risoluzione completa del problema isoperimetrico in $\mathbf{R}^n$. Più recentemente, sono stati oggetto di studio i problemi con discontinuità libere (introdotti da E. De Giorgi in [17]), tra cui ricordiamo il problema della segmentazione delle immagini digitali e problemi di meccanica delle fratture. L'interesse verso tali problemi è sicuramente motivato dalle applicazioni alla biologia, all'informatica ed alla fisica, in cui rispettivamente l'elaborazione delle immagini digitali e le proprietà elasto-plastiche dei materiali costituiscono elementi di notevole rilevanza. Si noti che le funzioni di Sobolev non godono di proprietà di compattezza altrettanto generali quanto le funzioni BV, nè ammettono insiemi di discontinuità $(n-1)$-dimensionali.
Lo studio vasto e accurato di questa classe di funzioni ha prodotto una teoria completa ed esauriente che comprende risultati di approssimazione, teoremi di immersione, teoremi di traccia e proprietà fini. Per un'analisi approfondita e dettagliata di tale classe di funzioni e delle relative proprietà facciamo riferimento al libro di L. Ambrosio, N. Fusco e D. Pallara [5].

L'obiettivo di questa tesi è lo studio di alcuni legami esistenti tra la teoria delle funzioni a variazione limitata e la teoria dei semigruppi generati da operatori ellittici del secondo ordine. Ricordiamo che, dati un aperto Ω di $\mathbf{R}^n$ ed $u \in L^1(\Omega)$, si dice che u è una funzione a variazione limitata (e si scrive $u \in BV(\Omega)$) se la sua derivata distribuzionale Du è rappresentabile mediante una misura di Radon la cui variazione totale così definita

$$|Du|(\Omega) = \sup\Big\{ \int_{\mathbf{R}^n} u \operatorname{div} \phi \, dx \ : \phi \in C^1_c(\Omega, \mathbf{R}^n), \|\phi\|_{L^\infty(\Omega)} \le 1 \Big\} \tag{1}$$

è finita. Nel caso particolare in cui $u = \chi_E$, la funzione caratteristica di un insieme $E \subset \mathbf{R}^n$, si definisce perimetro di E in Ω la variazione totale di $D\chi_E$; in tal caso scriveremo $\mathcal{P}(E, \Omega) = |D\chi_E|(\Omega)$ e diremo che E è un insieme di perimetro finito in Ω se

$\mathcal{P}(E,\Omega) < \infty$. Quando $\Omega = \mathbf{R}^n$ scriveremo semplicemente $\mathcal{P}(E)$.
Il punto di partenza dei risultati di ricerca presentati in questa tesi è il lavoro [15] in cui De Giorgi dà una definizione di variazione totale, che risulta equivalente a (1) se $\Omega = \mathbf{R}^n$.
L'interesse di De Giorgi in [15] era rivolto allo studio delle proprietà di struttura degli insiemi di perimetro finito, a possibili estensioni di disuguaglianze isoperimetriche e ad eventuali generalizzazioni della formula di Gauss-Green e perciò si limita ad approssimare funzioni $L^\infty(\mathbf{R}^n)$ tramite opportuni nuclei di convoluzione. Assegnata $f \in L^\infty(\mathbf{R}^n)$, definisce

$$W(t)f(x) := (G_t * f)(x)$$

dove $G_t(x)$ è il nucleo di Gauss-Weierstrass

$$G_t(x) = (4\pi t)^{-n/2} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}, \qquad t > 0,\ x \in \mathbf{R}^n.$$

Questa particolare scelta fa sì che $W(t)f$ soddisfaccia una legge di semigruppo

$$W(t+s)f(x) = W(t)W(s)f(x) \qquad t, s > 0$$

e che la funzione $t \mapsto H(t) := \|DW(t)f\|_{L^1(\mathbf{R}^n)}$ risulti una funzione monotona non crescente in $(0,\infty)$; infatti per $t, s > 0$ risulta

$$\|DW(t+s)f\|_{L^1(\mathbf{R}^n)} = \|DW(t)W(s)f\|_{L^1(\mathbf{R}^n)} = \|W(t)DW(s)f\|_{L^1(\mathbf{R}^n)} \leq \|DW(s)f\|_{L^1(\mathbf{R}^n)}$$

Tale monotonia garantisce l'esistenza del limite di $H(t)$ per $t \to 0$. Dato $E \subset \mathbf{R}^n$, De Giorgi definisce

$$P(E) := \lim_{t\to 0} \int_{\mathbf{R}^n} |DW(t)\chi_E|\, dx \tag{2}$$

Si osservi come la definizione (2) ha senso per una qualsiasi $f \in L^p(\mathbf{R}^n)$, $p \in [1,\infty]$. Così, analogamente a (2), si potrebbe dare la definizione di variazione totale per una funzione $f \in L^1(\mathbf{R}^n)$ che risulterà equivalente a quella data in (1), pertanto

$$|Df|(\mathbf{R}^n) = \lim_{t\to 0} \int_{\mathbf{R}^n} |DW(t)f|\, dx \tag{3}$$

e $\mathcal{P}(E) = P(E)$. D'altra parte, si noti che $W(t)f$ rappresenta la soluzione dell'equazione del calore in $\mathbf{R}^n$ con dato iniziale f, cioè $W(t)f$ risolve

$$\begin{cases} \partial_t v(t,x) = \Delta v(t,x) & t \in (0,\infty),\ x \in \mathbf{R}^n \\ v(0,x) = f(x) & x \in \mathbf{R}^n. \end{cases} \tag{4}$$

Pertanto all'uguaglianza (3) si può dare un ulteriore significato. Più precisamente, partendo dalla definizione (1), la formula (3) stabilisce un legame tra la variazione totale di una funzione $f \in L^1(\mathbf{R}^n)$ e la soluzione dell'equazione del calore in $\mathbf{R}^n$ con dato iniziale f. La definizione di perimetro (o di variazione totale) in $\mathbf{R}^n$ data da De Giorgi mette in relazione teorie apparentemente distanti tra loro, come la teoria delle funzioni a variazione limitata e la teoria delle equazioni di evoluzione.
Il problema che ci siamo posti è stato quello di vedere se tale relazione possa essere estesa al caso di domini, cioè se partendo dalla definizione (1) di variazione totale in

un dominio, sia possibile stabilire una relazione tipo (3) con la soluzione di un generico problema parabolico. D'altronde il caso del Laplaciano in $\mathbf{R}^n$ può essere considerato un caso modello e quindi il problema (4) il prototipo di tali problemi. Un elemento di novità nel nostro lavoro di ricerca è costituito dal fatto che considereremo Ω aperto generico; infatti in letteratura si trovano molti risultati riguardanti la teoria L^1, la maggior parte dei quali ambientati in $\mathbf{R}^n$ o in aperti limitati. Descriviamo brevemente le ipotesi considerate in questa tesi. Sia Ω un aperto di $\mathbf{R}^n$ con bordo uniformemente di classe C^2 e consideriamo $\mathcal{A}$ un operatore uniformemente ellittico in forma di divergenza

$$\mathcal{A}(x, D) = \sum_{i,j=1}^{n} D_i(a_{ij}(x)D_j) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)D_i + c(x).$$

Se $\Omega \neq \mathbf{R}^n$, associamo ad esso l'operatore al bordo $\mathcal{B}$ di tipo conormale

$$\mathcal{B}(x, D) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\nu_i(x)D_j,$$

dove ν è la normale esterna al bordo $\partial\Omega$.
Nel Capitolo 3 forniamo delle ipotesi sui coefficienti di $\mathcal{A}$ and $\mathcal{B}$ affinché il problema

$$\begin{cases} \partial_t w - \mathcal{A}w = 0 & \text{in } (0,\infty)\times\Omega \\ w(0) = u_0 & \text{in } \Omega \\ \mathcal{B}w = 0 & \text{in } (0,\infty)\times\partial\Omega \end{cases} \tag{5}$$

abbia un'unica soluzione per ogni dato $u_0 \in L^1(\Omega)$ e tale soluzione sia tale che il gradiente e le derivate seconde spaziali soddisfacciano delle stime opportune in norma L^1. La scelta di condizioni al bordo di tipo conormale sembra la più naturale ai fini di quello che vogliamo misurare. Il metodo usato per provare l'esistenza di tale soluzione consiste nel dimostrare la settorialità di $(A_1, D(A_1))$ cioè della realizzazione di $\mathcal{A}(\cdot, D)$ in $L^1(\Omega)$ con condizioni omogenee al bordo $\mathcal{B}(\cdot, D) = 0$.
Per ottenere la settorialità di $(A_1, D(A_1))$ è stato necessario provare risultati di esistenza e unicità per problemi ellittici del tipo

$$\begin{cases} \lambda w - \mathcal{A}(\cdot, D)w = f & x \in \Omega \\ \mathcal{B}(\cdot, D)w = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{6}$$

con dati $f \in L^1(\Omega)$, insieme con alcune stime sul risolvente. Tali risultati sono stati ottenuti per dualità dalla teoria L^∞. Gli argomenti di dualità richiedono ovviamente esistenza per il problema duale e ipotesi di maggiore regolarità per i coefficienti. Tali ipotesi sono state successivamente indebolite con argomenti di perturbazione. Nelle ipotesi

$$a_{ij} = a_{ji} \in W^{2,\infty}(\Omega) \quad \text{and} \quad b_i, c \in L^\infty(\Omega).$$

e di uniforme ellitticità per la matrice $A = (a_{ij})_{ij}$,

$$\mu^{-1}|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \leq \mu|\xi|^2, \qquad x \in \overline{\Omega},\ \xi \in \mathbf{R}^n$$

con $\mu \geq 1$, dimostriamo l'esistenza di un semigruppo analitico e fortemente continuo in $L^1(\Omega)$ che fornisce la soluzione di (5). Per il dominio $D(A_1)$ ricaviamo l'immersione $D(A_1) \hookrightarrow W^{1,1}(\Omega)$, da cui deriva la forte continuità del semigruppo in $W^{1,1}$ per funzioni $u_0 \in D(A_1)$, cioè

$$\lim_{t \to 0} \|T(t)u_0 - u_0\|_{W^{1,1}(\Omega)} = 0$$

per ogni $u_0 \in D(A_1)$, e questo fatto costituisce un risultato più forte di quello cercato, almeno per funzioni nel dominio.
La parte più importante del Capitolo 3 consiste nel provare delle stime sulla norma L^1 del gradiente del semigruppo e sulle derivate seconde spaziali. La prima stima è

$$\|DT(t)u\|_{L^1(\Omega)} \leq \frac{C}{\sqrt{t}}\|u\|_{L^1(\Omega)} \quad t > 0,$$

che viene provata usando le stime sul risolvente $R(\lambda, A_1)$ e la rappresentazione del semigruppo in termini del risolvente. La stima provata sulle derivate seconde è

$$\|D^2T(t)u\|_{L^1(\Omega)} \leq \frac{C}{t}\|u\|_{L^1(\Omega)},$$

che nel caso di un dato iniziale più regolare diventa

$$t^\delta \|D^2T(t)u\|_{L^1(\Omega)} \leq C\|u\|_{W^{1,1}(\Omega)}, \quad t \in (0,1), \tag{7}$$

con $\delta \in (1/2, 1)$. La stima (7) sarà utile nel Capitolo 4 per stabilire un risultato di tipo monotonia per la funzione

$$F(t) = \int_\Omega |DT(t)u_0|\, dx$$

In particolare nella Proposizione 4.3.3 ricaviamo la seguente disuguaglianza per funzioni nel dominio di A_1

$$\int_\Omega \eta |DT(t)v|_A\, dx \leq \int_\Omega \eta |Dv|_A\, dx + Ct^{1-\delta}\|v\|_{W^{1,1}(\Omega)} \quad t \in (0,1)$$

dove $|Dv|_A$ denota la variazione totale di v pesata con la matrice dei coefficienti A (per la definizione si veda la Sezione 4.2) e η è una qualsiasi funzione non negativa di classe $C_b^1(\overline{\Omega})$. Tale risultato di monotonia e un risultato di approssimazione in variazione per funzioni BV ci permetteranno di concludere e quindi di caratterizzare la variazione totale di una funzione in $L^1(\Omega)$ in termini della norma L^1 del gradiente della soluzione del problema (5): la relazione

$$|Du_0|(\Omega) = \lim_{t \to 0} \int_\Omega |D(T(t)u_0)|\, dx \tag{8}$$

è verificata per ogni $u_0 \in L^1(\Omega)$. Pertanto ne segue che $u_0 \in BV(\Omega)$ se e solo se il limite al secondo membro in (8) è finito. In verità si riesce a provare una caratterizzazione anche delle funzioni BV con peso continuo e limitato (vedi Teorema 4.3.4).

Nel Capitolo 4 illustriamo una seconda caratterizzazione delle funzioni BV. Tale caratterizzazione è ottenuta utilizzando in modo differente il semigruppo $(T(t))_{t\geq 0}$ ed il suo comportamento per $t \to 0$. Mediante le stime del nucleo $p(t,x,y)$ associato al semigruppo $(T(t))_{t\geq 0}$ e strumenti di teoria della misura si ottiene dapprima una completa caratterizzazione per gli insiemi di perimetro finito in Ω e successivamente mediante la formula di coarea si riesce a generalizzare i risultati di [33] ed a provare che una data funzione $u \in L^1(\Omega)$ è a variazione limitata in Ω se e solo se

$$\liminf_{t\to 0} \frac{1}{\sqrt{t}} \int_{\Omega\times\Omega} p(t,x,y)|u(x)-u(y)|\,dx\,dy < \infty$$

e in tal caso

$$|Du|_A(\Omega) = \lim_{t\to 0} \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{t}} \int_\Omega \int_\Omega p(t,x,y)|u(x)-u(y)|\,dydx,$$

Il Capitolo 1 e le Appendici A e B contribuiscono a rendere quanto più possibile autosufficiente questo lavoro di tesi. Infatti, nel primo capitolo richiamiamo le principali definizioni e qualche risultato utile relativo alla teoria dei semigruppi ed alla teoria della misura. L'Appendice A è dedicata ad una breve introduzione riguardo la teoria dell'interpolazione reale e complessa. In essa si raccolgono definizioni, qualche risultato classico e un teorema di caratterizzazione per lo spazio di interpolazione reale

$$(L^1(\Omega), W^{2,1}(\Omega) \cap W^{1,1}_{A,\nu}(\Omega))_{\theta,1},$$

dove $W^{1,1}_{A,\nu}(\Omega)$ è la chiusura di $\{u \in C^1(\overline{\Omega}) \,|\, \langle A(x)\cdot \nabla u, \nu(x)\rangle = 0 \text{ per } x \in \partial\Omega\}$, rispetto alla topologia di $W^{1,1}(\Omega)$. Questo ci permette di caratterizzare gli spazi intermedi $D_{A_1}(\theta,1)$. In verità, la trattazione poteva essere fatta in maggiore generalità, ma è stato scelto un livello più vicino ai casi concreti effettivamente utilizzati nella tesi. Nell'ultima appendice raccogliamo stime Gaussiane dall'alto e dal basso per la soluzione fondamentale dell'operatore $\partial_t - \mathcal{A}$. Per dedurre le stime dal basso, trattiamo dapprima il caso simmetrico e successivamente estendiamo le stime ottenute al caso non simmetrico, che è quello di nostro interesse.