

INTRODUZIONE. - (*)

Dal punto di vista dell'Analisi Numerica, una classe particolarmente importante di sistemi di equazioni differenziali lineari del 1° ordine è quella costituita dai così detti "sistemi stiff". Tali sistemi (in genere originati da problemi fisici) possono essere caratterizzati, in pratica, dal fatto che i metodi classici per l'approssimazione numerica delle loro soluzioni richiedono, per essere efficienti, un passo di discretizzazione molto piccolo rispetto all'intervallo di tempo in cui si vuole integrare e impongono pertanto calcoli lunghi ed onerosi: lo studio di metodi alternativi di risoluzione numerica è quindi particolarmente importante per sistemi di questo tipo.

Le ricerche in questo campo procedono in diverse direzioni: qualsiasi procedimento numerico si introduca, comunque, dovrà essere tale che le condizioni di stabilità non impongano particolari restrizioni sul passo, dato che nei sistemi stiff esistono soluzioni che decadono più rapidamente di altre.

Nel presente lavoro proponiamo, utilizzando le tecniche della teoria della stabilità di Liapunov, alcuni metodi del 2° e 3° ordine non lineari applicabili ai sistemi stiff.

Ricordiamo che nei sistemi stiff non si può prescindere dal tipo di problema che si vuole risolvere, cioè dal tipo di stabilità richiesta; i metodi qui proposti si riferiscono ai casi in cui l'equazione test è $y' = \lambda y$ con $\text{Re} \lambda < 0$. Questa scelta è motivata dal fatto che ogni sistema lineare di equazioni del tipo $y' = Ay$ può essere ridotto ad un sistema del tipo $z' = Jz$, dove J è la matrice di Jordan applicata alla matrice A , mentre ogni sistema non lineare $y' = f(y)$ può essere linearizzato localmente, utilizzando come matrice A la matrice Jacobiana di f .

(*) Ringraziamo il Prof. D. TRIGIANTE di averci proposto il problema e per i validi suggerimenti dati.

§ 1. Metodi di discretizzazione A-stabili.

Le notazioni usate nel presente lavoro sono quelle adottate in [1].
Richiamiamo in questo paragrafo alcuni concetti usati nella teoria della discretizzazione di equazioni differenziali ordinarie (Henrici-Dalquist).

Sia $B = S(0,r) \subset \mathbb{R}^m$, $f : B \rightarrow \mathbb{R}^m$ una funzione localmente lipschitziana.

L'equazione differenziale autonoma (1)

$$1.1 \quad \frac{dy}{dt} = f(y)$$

considerata per $t \in \mathbb{R}^+$ definisce un sistema dinamico continuo su B [2],
che indichiamo con u . Denoteremo con $T(t)x_0$, $t \in \mathbb{R}^+$ la traiettoria passante per x_0 .

Un metodo di discretizzazione \mathcal{M} dipendente dal passo $h \in H = (0,1)$,
è applicabile alla 1.1 se [3]

- a) definisce una famiglia $(P_h)_{h \in H}$ (2) di sistemi dinamici discreti ad un parametro, su B .
- b) L'applicazione $P : h \in H \rightarrow P(h) = P_h \in C(B)$ è continua.
- c) per ogni $y \in B$ e per ogni $h \in H$, $\omega_{P_h}^+(y)$ ha le stesse proprietà asintotiche di $\omega_u^+(y)$ e se risulta inoltre

$$\bigcup_{y \in B} \omega_{P_h}^+(y) = \bigcup_{y \in B} \omega_u^+(y) \quad \text{per ogni } h \in H$$

Classificazione per soggetto: AMS(MOS)1970:65L05

(1) Si considera qui il problema di un'equazione differenziale autonoma perché rappresenta il caso più frequente; ad esso inoltre ci si può sempre ricondurre aggiungendo un'equazione opportuna alla 1.1 [2].

(2) Per brevità di notazione indichiamo la famiglia $((P_h^k)_{k \in \mathbb{N}_0})_{h \in H}$ semplicemente con $(P_h)_{h \in H}$.

d) esiste $s \geq 1$ tale che per ogni $h \in H$, per ogni $n > 0$ e per ogni $y \in B$

$$\| P_h^n(y) - T(nh)y \| = O(h^{s+1})$$

Def. 1. [6] Un metodo di discretizzazione \mathcal{M} è detto A-stabile se applicato all'equazione differenziale test

$$y' = \lambda y, \text{ Re } \lambda < 0$$

genera una successione $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$, con $y_n = P_h(y_{n-1})$, tale che $y_n \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$, qualunque sia $h > 0$.

Porremo nel seguito per brevità $\Omega = \bigcup_{y \in B} \omega_u^+(y)$.

Se sono verificate le a), b), c) ed Ω è stabile il metodo di discretizzazione \mathcal{M} si dice stabile; se Ω è asintoticamente stabile il metodo risulta A-stabile.

Se è verificata la d) il metodo è detto consistente di ordine s .

Se sono verificate la c) e la d) il metodo risulta convergente ed s è detto ordine di convergenza del metodo.

Richiamiamo inoltre il seguente teorema di Liapunov.

Teorema 1. [2] - Un insieme compatto $\Omega \subset B$ è asintoticamente stabile per il sistema dinamico continuo u su B , se e solo se esiste una funzione V , continua e a valori reali, definita in un intorno U di Ω tale che:

1) $V(y) = 0$ per ogni $y \in \Omega$

$V(y) > 0$ per ogni $y \in U, y \notin \Omega$

2) $V(T(t)y) < V(T(0)y) = V(y)$ per ogni $y \notin \Omega$, per ogni $t > 0$.

Se V è di classe C^1 in B , V è detta funzione di Liapunov.

Il teorema sussiste formalmente identico anche per un sistema dinamico discreto P purché la 2) venga sostituita dalla

$$2') V(P^n(y)) < V(y) \quad \text{per ogni } y \notin \Omega, \quad \text{per ogni } n > 0.$$

§ 2. Metodi a p-passi.

Supponiamo inizialmente che sia $m = 1$ e che sia $f(0) = 0$.

Poiché ricerchiamo metodi A-stabili si considera la 1.1 sotto l'ulteriore ipotesi che f sia di classe C^1 in B e che risulti $f'(y) < 0$ per ogni $y \in B$.

In questo caso si ha che $\Omega = \{y \in B : f(y) = 0\}$ e che Ω è compatto. Denotato con (\cdot, \cdot) il prodotto scalare in R e scelta come funzione di Liapunov

$$V : y \in B \rightarrow (f(y), f(y)) = f^2(y) \in R,$$

dal teorema 1 si deduce che Ω è asintoticamente stabile per il sistema dinamico continuo u . (Risulta infatti $\dot{V}(y) = 2f^2(y) f'(y) < 0$ per ogni $y \notin \Omega$)

Si consideri ora l'equazione alle differenze

$$2.1 \quad \sum_{i=0}^p \alpha_i y_{n+p-i+1} + h G(h, y_{n+1}, \dots, y_{n+p}, f(y_{n+1}), \dots, f(y_{n+p}), f'(y_{n+1}), \dots, f'$$

per $p > 1$, $n \in N_0$, $h \in H = (0, 1)$, $\alpha_i \in R$, $\alpha_0 \neq 0$. Sia $G(h, y_{n+1}, \dots, f'(y_{n+p}))$ (che nel seguito indicheremo brevemente con G_n) una funzione continua non lineare nelle sue variabili.

Indicheremo nel seguito $f(y_{n+j})$, $f'(y_{n+j})$, rispettivamente con f_{n+j} , f'_{n+j}

$j = 1, 2, \dots, p$.

Richiediamo inoltre che sia

$$\sum_{i=0}^p \alpha_i = 0.$$

Posto $\alpha_0 = -1$, $\beta_i = \sum_{j=1}^i \alpha_j - 1$ per $i = 1, \dots, p-1$ risulta $\beta_p = 0$ e

la 2.1 si può scrivere nella forma

$$2.2 \quad y_{n+p+1} = y_{n+p} + \sum_{i=1}^{p-1} \beta_i (y_{n+p+1-i} - y_{n+p-i}) + h G_n$$

Nell'ipotesi che siano noti i valori y_1, \dots, y_p , si vede facilmente che la 2.2 definisce una funzione di iterazione P_h , continua, tale che

$$y_{n+p+1} = P_h(y_{n+p}) = P_h^{n+1}(y_p) \quad h \in H$$

e quindi una famiglia di sistemi dinamici ad un parametro che indichiamo ancora con $(P_h)_{h \in H}$.

(la condizione iniziale $y(0) = y_1$, associata alla 1.1, non è sufficiente ad innescare il procedimento, oltre al punto y_1 occorrono i valori y_2, \dots che devono essere calcolati a partire da y_1 , con un metodo ad un passo, che abbia ordine di convergenza almeno s affinché la convergenza del metodo γ ottenuto dalla 2.2 non dipenda dai valori y_2, \dots, y_p . [5]).

Indichiamo rispettivamente con Y_n e \bar{G}_n i vettori colonna

$$Y_n = \begin{pmatrix} y_{n+p} \\ y_{n+p-1} \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ y_{n+2} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \bar{G}_n = \begin{pmatrix} G_n \\ 0 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$$

e con A la matrice quadrata di ordine $p-1$

$$A = \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_{p-1} \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Si prova facilmente che l'equazione 2.2 è equivalente alle equazioni matriciali

$$2.3 \quad Y_{n+1} = Y_n + A(Y_n - Y_{n-1}) + h \bar{G}_n$$

$$2.4 \quad Y_{n+1} = Y_{n-1} + (E+A)(Y_n - Y_{n-1}) + h \bar{G}_n$$

Nel seguito denoteremo con E la matrice unitaria di ordine $p-1$ e si intenderà che le matrici abbiano ordine $p-1$ e che i vettori abbiano dimensione $p-1$.

Denotiamo con Ψ la funzione vettoriale tale che

$$\begin{aligned} \Psi : Y = (y_1, y_2, \dots, y_{p-1}) \in B^{p-1} &\rightarrow (\psi_1(y_1, \dots, y_{p-1}), \dots, \psi_{p-1}(y_1, \dots, y_{p-1})) = \\ &= (f(y_1), f(y_2), \dots, f(y_{p-1})) \in R^{p-1} \end{aligned}$$

Poniamo d'ora in poi per brevità $\Psi_n = \Psi Y_n$. Il teorema di Lagrange assicura allora l'esistenza di una matrice diagonale $J_\delta = \text{diag}(f'(\delta_1), \dots, f'(\delta_{p-1}))$

$$\delta_j \in (y_{n+p+1-j}, y_{n+p+2-j}) \quad \text{tale che} \quad \Psi_{n+1} - \Psi_n = J_\delta (Y_{n+1} - Y_n)$$

Siano C e Γ matrici definite positive e sia K una matrice tale che

KJ_δ sia definita negativa. Ne segue che la matrice

$$R = (C - hKJ_\delta + \frac{h^2}{\alpha} J_\delta \Gamma J_\delta) \quad \text{per } \alpha > 0$$

è definita positiva ⁽³⁾ e quindi è invertibile.

Posto $A = R^{-1}C$ e $\bar{G}_n = -h R^{-1} J_\delta \Gamma \Psi_n$ nella 2.3 si ottiene

$$2.5 \quad Y_{n+1} = Y_n + R^{-1} (C(Y_n - Y_{n-1}) - h^2 J_\delta \Gamma \Psi_n) .$$

La 2.5 per le ipotesi fatte definisce la funzione di iterazione

$$Q_h : Y = (y_1, \dots, y_{p-1}) \rightarrow (q_1(y_1, \dots, y_{p-1}), \dots, q_{p-1}(y_1, \dots, y_{p-1})) \\ = (P_h(y_1), y_2, y_3, \dots, y_{p-1}) .$$

Affinché la 2.2 definisca una famiglia di sistemi dinamici discreti $(P_h)_h$ su B , per la quale Ω sia asintoticamente stabile, è sufficiente richiedere che la 2.5 definisca una famiglia $(Q_h)_{h \in H}$ di sistemi dinamici discreti su B^{p-1} , per la quale Ω^{p-1} sia asintoticamente stabile^[2].

Denotato con (\cdot, \cdot) il prodotto scalare in R^{p-1} , fissato $h \in H$, siano V' e V'' due funzioni tali che

(3) Poiché abbiamo fatto l'ipotesi che $f'(y) < 0$ per ogni $y \in B$. J_δ è definita negativa.

$$V' : Y \in B^{p-1} \rightarrow V'Y = \frac{1}{h^2} (Q_h Y - Y, C(Q_h Y - Y)) \in R$$

$$V'' : Y \in B^{p-1} \rightarrow V''Y = (\Psi Q_h Y, \Gamma \Psi Q_h Y) \in R.$$

Poniamo $V = V' + V''$. V soddisfa la 1) del teorema 1; inoltre indicato

VY_n con V_n si ha

$$\Delta V_n = V_n - V_{n-1} \leq$$

$$2.6 \leq \frac{2}{h^2} (Y_{n+1} - Y_n, C(Y_{n+1} - 2Y_n + Y_{n-1})) + (\Psi_{n+1} - \Psi_n, \Gamma(\Psi_{n+1} + \Psi_n)).$$

Dalla 2.6 e dalla 2.5 per $\alpha = 2$ si ha

$$\Delta V_n \leq \frac{2}{h} (Y_{n+1} - Y_n, KJ_\delta (Y_{n+1} - Y_n)) < 0 \quad \text{cioè è soddisfatta la 2) del}$$

teorema 1 e quindi anche la c).

La 2.5 per $\alpha = 2, p = 2, C = E$, $\Gamma = \gamma E$ per $\gamma > 0$, $K = kE$ per k

diviene

$$2.I \quad y_{n+3} = y_{n+2} + \frac{y_{n+2} - y_{n+1} - h^2 \gamma f'(\delta_1) f_{n+2}}{1 - h k f'(\delta_1) + \frac{h^2}{2} \gamma f'^2(\delta_1)}$$

La 2.I fornisce un metodo A-stabile a due passi che soddisfa alle condizioni a), b) e c).

Maggiorando opportunamente la 2.6 e per $\alpha = 1$ si ottengono i metodi già trovati nell'ambito della stessa teoria da D. Trigiante (cfr. [7], [8]).

$$y_{n+3} = y_{n+2} + \frac{y_{n+2} - y_{n+1} - h^2 \gamma f'(\delta_1) f_{n+2}}{1 - h k f'(\delta_1) + h^2 \gamma f'^2(\delta_1)} \quad (\delta_1 \in (y_{n+2}, y_{n+3}))$$

$$y_{n+3} = y_{n+2} + \frac{h \gamma f_{n+2}}{k - h \frac{\gamma}{2} f'(\delta_1)}$$

$$y_{n+3} = y_{n+2} + \frac{h \gamma f_{n+2}}{k - h \gamma f'(\delta_1)}$$

Un'altra classe di metodi si ottiene come segue.

Sia $\gamma > 0$, scelta $\Gamma = \text{diag}(1, 0, \dots, 0)$, sia K una matrice tale che risulti KJ_n definita negativa ⁽⁴⁾.

Sia C una matrice definita positiva allora

$$R = (C - hKJ_n + h^2 \gamma J_n \Gamma J_n) \text{ è invertibile.}$$

Posto $A = 2R^{-1}C - E$ e $\bar{G}_n = -2h\gamma R^{-1}J_n \Gamma \Psi_{n-1}$ nell'equazione 2.3 si ha

⁽⁴⁾ Analogamente esiste una matrice $J_n = \text{diag}(f'(\eta_1), \dots, f'(\eta_{p-1}))$ di ordine $p-1$ tale che $\Psi_{n+1} - \Psi_{n-1} = J_n (Y_{n+1} - Y_{n-1})$ per $\eta_j \in (y_{n+p-j}, y_{n+p+2-j})$ è definita negativa se $f'(y) < 0$ per ogni $y \in B$

$$2.7 \quad Y_{n+1} = Y_{n-1} + 2R^{-1} (C(Y_n - Y_{n-1}) - h^2 \gamma J_n \Gamma \Psi_{n-1}) .$$

Sia

$$V''' : Y \in \mathbb{B}^{p-1} \rightarrow (\Psi Y, \Psi Y) \in \mathbb{R}.$$

La funzione $W = V' + \gamma(V'' + V''')$ soddisfa la 1 del teorema 1.

Indicato WY_n con W_n si ha

$$\begin{aligned} \Delta W_n = W_n - W_{n-1} &= \frac{1}{h^2} (Y_{n+1} - Y_{n-1}, C(Y_{n+1} - 2Y_n + Y_{n-1})) + (\Psi_{n+1} - \Psi_{n-1}, \gamma \Gamma (\Psi_{n+1} + \Psi_{n-1})) \\ &= \frac{1}{h} (Y_{n+1} - Y_{n-1}, K J_n (Y_{n+1} - Y_{n-1})) < 0 \end{aligned}$$

ed è così soddisfatta anche la 2) del teorema 1.

Per $p = 3$ posto

$$L = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \Gamma + h k_1 f'(n_2) M \quad K = (-k_1 f'(n_2) L + k f'(n_1) \Gamma) J_n^{-1} \quad k > 0, k_1 < 0$$

si ottiene dalla 2.7 il metodo A-stabile a tre passi.

$$2.II \quad y_{n+4} = y_{n+2} + 2 \frac{y_{n+3} - y_{n+2} + h k_1 (f_{n+3} - f_{n+1}) - h^2 \gamma f'(n_1) f_{n+2}}{1 - h k f'(n_1) + 2h k_1 f'(n_2) + h^2 \gamma f'^2(n_1)}$$

$$n_1 \in (y_{n+2}, y_{n+4}), \quad n_2 \in (y_{n+1}, y_{n+3})$$

Per $p = 2$, $C = E, K = k E$ per $k > 0$, si ritrovano dalla 2.7 i metodi a due passi (cfr. [7]).

$$y_{n+3} = y_{n+1} + 2 \frac{y_{n+2} - y_{n+1} - h^2 \gamma f'(n_1) f_{n+1}}{1 - h k f'(n_1) + \gamma h^2 f'^2(n_1)} \quad n_1 \in (y_{n+1}, y_{n+3}).$$

$$y_{n+3} = y_{n+1} + \frac{2 h f_{n+1}}{k - h f'(n_1)}$$

Metodi ad un passo dello stesso tipo sono stati trovati da Rosenbrock (cfr. [12])

§ 3. Ordine dei metodi.

Se $f'(y)$ non è rapidamente variabile ⁽⁵⁾ in B approssimando $f'(n_1)$ con $f'(y_{n+3}), f'(\delta_1)$ e $f'(n_2)$ con $f'(y_{n+2})$ nei metodi descritti sono [7] ancora soddisfatte le 1) e 2) del teorema 1.

Per $k = 2, \gamma = 1$ il metodo 2.I è del 2° ordine.

Per $k = \frac{5}{8}, \gamma = \frac{1}{8}, k_1 = -h^r$ il metodo 2.II è del 3° ordine, per $r \geq 1$.

§ 4. Applicabilità ai sistemi.

Quanto detto nel §.2 e nel §.3 si può estendere ai sistemi di equazioni differenziali del 1° ordine. In questo caso se $y \in \mathbb{R}^m$, E è la matrice unitaria di ordine m, f'_{n+1} la matrice Jacobiana calcolata nel punto $y_{n+1} \in \mathbb{R}^m$ e f_n è il vettore $f(y_n) \in \mathbb{R}^m$ i metodi 2.I e 2.II, per $r = 2$, assumono rispettivamente la forma

(5) E' sempre possibile trovare un intervallo in cui sia verificata questa condizione prendendo $h \in H' \subset H$.

$$3.I \quad y_{n+3} = y_{n+2} + (E - 2hf'_{n+2} + \frac{h^2}{2} f''_{n+2})^{-1} (y_{n+2} - y_{n+1} - h^2 f'_{n+2} f_{n+2})$$

$$3.II \quad y_{n+4} = y_{n+2} + 2(E - \frac{5}{8} h f'_{n+3} + h^2 (\frac{1}{8} f''_{n+3} - 2h f'_{n+2}))^{-1} (y_{n+3} - y_{n+2} - h^3 (f_{n+3} - f_{n+1}) - \frac{h^2}{8} f'_{n+3} f_{n+2}).$$

§ 5. Risultati numerici.

Sono stati applicati i metodi 3.I e 3.II a due sistemi stiff

$$S1 \quad \begin{cases} y_1' = -2000 y_1 + 1000 y_2 + 1000 & y_1(0) = 0 \\ y_2' = y_1 - y_2 & y_2(0) = 0 \end{cases}$$

$$S2 \quad \begin{cases} y_1' = 0.01 - [1 + (y_1 + 1000)(y_1 + 1)] [0.001 + y_1 + y_2] & y_1(0) = 0 \\ y_2' = 0.01 - (1 + y_2^2)(0.01 + y_1 + y_2) & y_2(0) = 0 \end{cases}$$

I risultati sono stati confrontati con la soluzione teorica per il sistema S1 e con la soluzione numerica ottenuta applicando un metodo Runge-Kutta del quarto ordine con $h = 0.0002$, per il sistema S2.

I metodi hanno dato buoni risultati.

Nelle tabelle 1,2 sono riportati i risultati numerici ottenuti con il metodo 3.I e 3.II applicati al sistema S1.

Tutti i valori sono moltiplicati per 10.

Nelle tabelle 3,4 vi sono gli analoghi risultati relativi al sistema S2.

*Accettato per la pubblicazione su
proposta del Prof. Donato TRIGIANTE*

Punto finale	Soluzi ^o ne teorica	h=0.01	h=0.025	h=0.05	h=0.1	h=0.5
0.5	6.10380 2.20955	6.10410 2.21015	6.10471 2.21098	6.10564 2.21223	6.10591 2.21421	
1.0	6.96545 3.93242	6.96638 3.93428	6.96774 3.93699	6.97009 3.94125	6.97384 3.94884	6.98533 3.97214
1.5	7.63654 5.27426	7.63818 5.27755	7.64059 5.28236	7.64454 5.29005	7.65140 5.30428	7.68404 5.36926
2.0	8.15922 6.31936	8.16150 6.32392	8.16486 6.33063	8.17032 6.34147	8.18060 6.36188	8.23491 6.47068
2.5	8.56631 7.13334	8.56909 7.13890	8.57319 7.14711	8.57989 7.16045	8.59249 7.18588	8.66667 7.33404
3.0	8.88337 7.76730	8.88649 7.77354	8.89111 7.78279	8.89867 7.79788	8.91326 7.82691	9.00310 8.00668
3.5	9.13031 8.26106	9.13362 8.26769	9.13854 8.27752	9.14661 8.29364	9.16215 8.32485	9.26347 8.52733
4.0	9.32264 8.64563	9.32601 8.65237	9.33103 8.66240	9.33928 8.67890	9.35541 8.71103	9.46360 8.92746
4.5	9.47244 8.94515	9.47577 8.95180	9.48072 8.96171	9.48890 8.97805	9.50486 9.01006	9.61617 9.23255

Tab. 1. - Risultati ottenuti mediante il metodo 3.1 applicato al sistema S1.

Punto finale	Soluzione teorica	h=0.01	h=0.025	h=0.05	h=0.1	h=0.5
0.5	6.10380 2.20955	6.10380 2.20955	6.10381 2.20956	6.10381 2.20960	6.10023 2.20981	
1.0	6.96545 3.93242	6.96545 3.93242	6.96546 3.93244	6.96556 3.93260	6.96605 3.93366	
1.5	7.63654 5.27426	7.63654 5.27427	7.63656 5.27431	7.63670 5.27463	7.64071 5.27689	7.69854 5.35862
2.0	8.15922 6.31936	8.15922 6.31937	8.15925 6.31943	8.15951 6.31992	8.16132 6.32348	8.26172 6.52416
2.5	8.56631 7.13334	8.56631 7.13334	8.56635 7.13343	8.56667 7.13407	8.56688 7.13889	8.71752 7.47459
3.0	8.88337 7.76730	8.88337 7.76731	8.88343 7.76741	8.88383 7.76820	8.88674 7.77415	9.12259 8.24609
3.5	9.13031 8.26106	9.13031 8.26107	9.13038 8.26119	9.13082 8.26210	9.13599 8.26901	9.45356 8.86919
4.0	9.32264 8.64563	9.32265 8.64564	9.32271 8.64577	9.32322 8.64678	9.32712 8.65447	9.68499 9.36937
4.5	9.47244 8.94515	9.47244 8.94516	9.47252 8.94530	9.47305 8.94638	9.47588 8.95467	9.86514 9.76788

Tab. 2 - Risultati ottenuti mediante il metodo 3.II applicato al sistema Sl.

Punto finale	Soluzione con R.Kutta	h=0.01	h=0.1	h=0.5
1.0	-0.019949 0.009969	-0.019954 0.009974	-0.019950 0.009970	-0.019949 0.009969
2.0	-0.029928 0.019949	-0.029938 0.019959	-0.029929 0.019950	-0.029927 0.019948
3.0	-0.039907 0.029928	-0.039923 0.029943	-0.039908 0.029929	-0.039904 0.029924
4.0	-0.049886 0.039907	-0.049906 0.039927	-0.049886 0.039907	-0.049876 0.039897
5.0	-0.059865 0.049886	-0.059890 0.049911	-0.059864 0.049885	-0.059845 0.049866
6.0	-0.069843 0.059865	-0.069873 0.059895	-0.069840 0.059861	-0.069809 0.059830
7.0	-0.079821 0.069843	-0.079856 0.069878	-0.079814 0.069836	-0.079766 0.069788
8.0	-0.089799 0.079821	-0.089838 0.079860	-0.089787 0.079809	-0.089716 0.079738
9.0	-0.099777 0.089799	-0.099820 0.089843	-0.099758 0.089780	-0.099658 0.089680
10.0	-0.109754 0.099776	-0.109802 0.099824	-0.109727 0.099749	-0.109591 0.099613

Tab. 3 - Risultati ottenuti mediante il metodo 3.1 applicato al sistema 52

Punto finale	Soluzione con R.Kutta	h=0.01	h=0.1	h=0.5
1.0	-0.01994936 0.00996972	-0.01994937 0.00996974	-0.01995099 0.00997165	
2.0	-0.02992867 0.01994925	-0.02992870 0.01994927	-0.02993331 0.01995348	-0.03003245 0.02005153
3.0	-0.03990776 0.02992855	-0.03990778 0.02992857	-0.03991373 0.02993490	-0.04010797 0.03013235
4.0	-0.04988662 0.03990763	-0.04988660 0.03990761	-0.04989509 0.03991579	-0.05019538 0.04021080
5.0	-0.05986524 0.04988647	-0.05986514 0.04988636	-0.05987458 0.04989604	-0.06025908 0.05028782
6.0	-0.06984361 0.05986506	-0.06984337 0.05986483	-0.06985426 0.05987555	-0.07034883 0.06036097
7.0	-0.07982171 0.06984340	-0.07982129 0.06984297	-0.07983241 0.06985421	-0.08039946 0.07043220
8.0	-0.08979954 0.07982147	-0.08979886 0.07982079	-0.08981006 0.07983191	-0.09048869 0.08049795
9.0	-0.09977709 0.08979926	-0.09977607 0.08979824	-0.09978632 0.08980853	-0.10052498 0.09056138
10.0	-0.10975435 0.09977677	-0.10975290 0.09977532	-0.10976159 0.09978398	-0.11061085 0.10061763

Tab. 4 - Risultati ottenuti mediante il metodo 3.II applicato al sistema 52.