

1. - IL CONCETTO DI "PROCESSO" NELLA MATEMATICA FINANZIARIA. -

Il Kalman [3] definisce un "sistema dinamico" come un insieme di stati $X = \{x_i\}$ e di una funzione F :

$$x(t) = F(x_0, t_0, t, i)$$

la quale, assegnato lo stato x_0 in cui si trova il sistema al tempo t_0 e data una funzione temporale $i(t)$, detta funzione di ingresso, fornisce lo stato del sistema all'istante t .

Esiste inoltre una funzione d'uscita del tipo:

$$u(t) = G[x(t), t]$$

che fornisce l'uscita all'istante t in funzione di t , e dello stato all'istante t . Le due funzioni F e G soddisfanno i due seguenti assiomi fondamentali:

a) Assioma di causalità o di relazione causale tra ingresso ed uscita.

Se un sistema, partendo dallo stato x_0 al tempo t_0 e per effetto di un ingresso i_1 si porta ad uno stato x_1 al tempo t_1 , lo stesso sistema partendo dallo stato x_0 al tempo t_0 e per effetto di un ingresso $i_2 \equiv i_1$ per ogni istante non maggiore di t_1 , arriverà al tempo t_1 allo stesso stato x_1 . Cioè:

$$F(x_0, t_0, t_1, i_1) = F(x_0, t_0, t_1, i_2) \quad \text{per} \quad \begin{cases} i_2(t) = i_1(t) \\ t \leq t_1 \end{cases}$$

b) Assioma di composizione o di previsione dello stato di un sistema in ogni istante successivo a t_1 (detto anche di consistenza).

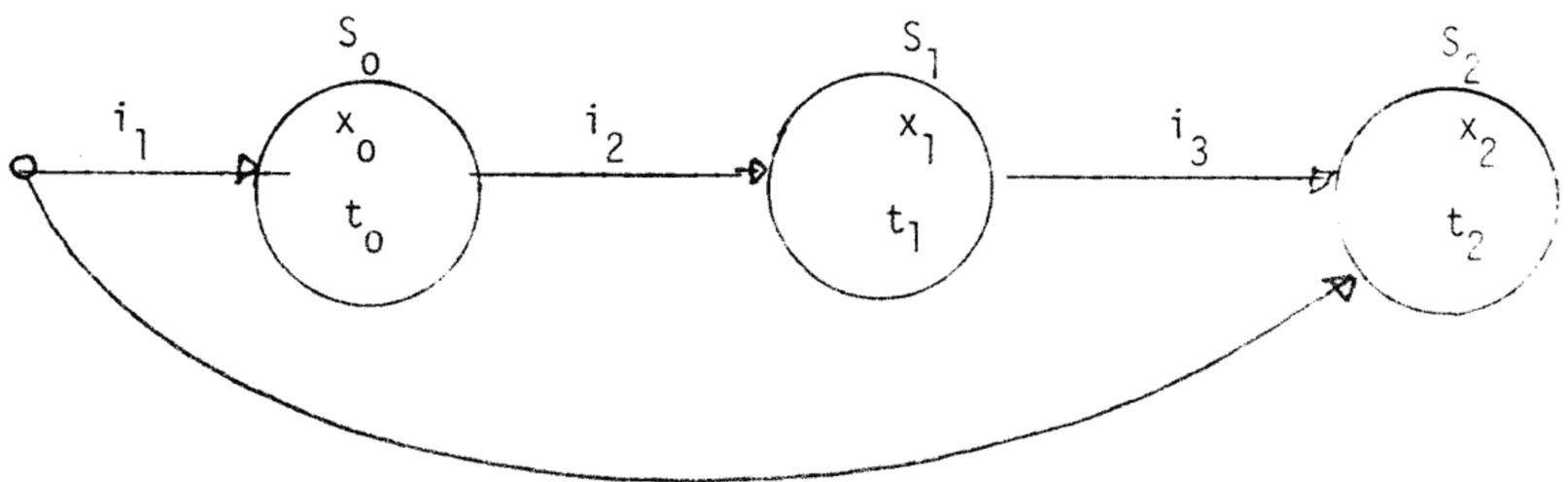
Se un sistema, partendo da x_0 in t_0 perfetto di un ingresso i_1 , si porta allo stato x_1 nel tempo t_1 , e partendo da x_1 in t_1 con i_2 si porta ad x_2 in t_2 , lo stesso sistema, partendo dallo stato x_0 in t_0 e tramite un ingresso i_3 , così definito:

$$i_3(t) = \begin{cases} i_1(t) & \text{se } t \leq t_1 \\ i_2(t) & \text{se } t > t_1 \end{cases}$$

si porterà direttamente allo stato x_2 in t_2 . Cioè:

$$F[F(x_0, t_0, t_1, i_1), t_1, t_2, i_2] = F(x_0, t_0, t_2, i_3) .$$

Questa proprietà è caratterizzante per il concetto di stato di un sistema dinamico, come rappresentato in figura



Una siffatta descrizione del sistema, applicata sulle operazioni finanziarie, soddisfa le leggi di capitalizzazione, sconto ed attualizzazione, sia nel caso discreto che nel caso continuo [4], [5].

Possiamo inoltre osservare che: l'insieme T dei valori assumibili dal parametro temporale t definisce poi un:

Sistema dinamico a parametro discreto $T = \{0, +1, +2, \dots\}$

Sistema dinamico a parametro continuo $T = \{t | t \geq 0\}$.

Una classe di sistemi a "tempo discreto" è quella per cui la funzione F è data indirettamente dalla relazione ricorrente:

$$(1) \quad x(t+1) = f\{x(t), i(t), t\}$$

che soddisfacendo automaticamente gli assiomi di causalità e composizione, soddisfa contemporaneamente l'equazione che regola il flusso monetario [5], [7], [8].

L'equazione del tipo (1) viene detta equazione di stato e la funzione f funzione di translazione (o di trasporto). Queste rappresentano anche il più generale sistema finanziario [8] [9] [10].

E' noto infatti che il reddito, frutto di un capitale, può essere interpretato come un flusso monetario sotto la cui influenza il capitale subisce delle variazioni nel tempo. Questo flusso è collegato al tasso di interesse, che può essere costante nel tempo o variabile.

Inoltre esso è collegato ad altri parametri di ingresso del tipo:

$$(2) \quad X = \{x_1, x_2, \dots, x_k; t_1, t_2, \dots, t_k; i_1, i_2, \dots, i_k; a, b, c.\}$$

che possono rappresentare capitale, tasso di interesse, di sconto, tempo di impiego, stabilità monetaria, congiuntura economica, solvibilità, ecc. . Sotto l'influenza di questi parametri lo stato del sistema finanziario viene decomposto in un insieme di variabili di stato, alcune delle quali possono essere di carattere aleatorio. E' il caso dello studio sulle assicurazioni.