COSTRUZIONE DI UN MODELLO TEORICO DI STRATEGIA FINANZIARIA OTTIMALE PER UNA IMPRESA ASSICURATIVA.-

Introduzione. - E' noto che il teorema ridotto di De Finetti definisce una strategia incompleta ed il teorema generalizzato, una strategia completa [1]. Questi due teoremi, per delle strategie assegnate, forniscono un limite superiore della probabilità di rovina, ma non la probabilità di rovina stessa, come è dimostrato da Dubordieu [2]. Ne discende che, nel campo delle assicurazioni a ripartizione, il premio richiesto è necessariamente superiore al valore probabile del sinistro. Di conseguenza,dal punto di vista della massimizzazione del guadagno probabile, l'assicuratore ha tutto l'interesse a fissare il più alto possibile il limite superiore del capitale da assicurare.

Ma dal punto di vista del rischio di rovina la situazione si capovolge, poiché, per un assegnato capitale iniziale dell'assicuratore, l'aumento del numero delle polizze che egli fa sottoscrivere, riduce il valore del pieno di conservazione. Possiamo allora osservare che la strategia che deve scegliere l'assicuratore, in pratica, deve essere un compromesso tra le probabilità di guadagno medio ed il rischio di rovina.

1. - IL CONCETTO DI "PROCESSO" NELLA MATEMATICA FINANZIARIA. -

Il Kalman [3] definisce un "sistema dinamico" come un insieme di stati $X = \{x_i\}$ e di una funzione F:

$$x(t) = F(x_0, t_0, t, i)$$

la quale, assegnato lo stato x_0 in cui si trova il sistema al tempo t_0 e data una funzione temporale $i(t)$, detta funzione di ingresso, fornisce lo stato del sistema all'istante t.

Esiste inoltre una funzione d'uscita del tipo:

$$u(t) = G[x(t), t]$$

che fornisce l'uscita all'istante t in funzione di t, e dello stato all'istante t. Le due funzioni F e G soddisfano i due seguenti assiomi fondamentali:

a) Assioma di causalità o di relazione causale tra ingresso ed uscita.

Se un sistema, partendo dallo stato x_0 al tempo t_0 e per effetto di un ingresso i_1 si porta ad uno stato x_1 al tempo t_1, lo stesso sistema partendo dallo stato x_0 al tempo t_0 e per effetto di un ingresso $i_2 \equiv i_1$ per ogni istante non maggiore di t_1, arriverà al tempo t_1 allo stesso stato x_1. Cioè:

$$F(x_0, t_0, t_1, i_1) = F(x_0, t_0, t_1, i_2) \qquad \text{per} \quad \begin{cases} i_2(t) = i_1(t) \\ t \leq t_1 \end{cases}$$

b) Assioma di composizione o di previsione dello stato di un sistema in ogni istante successivo a t_1 (detto anche di consistenza).

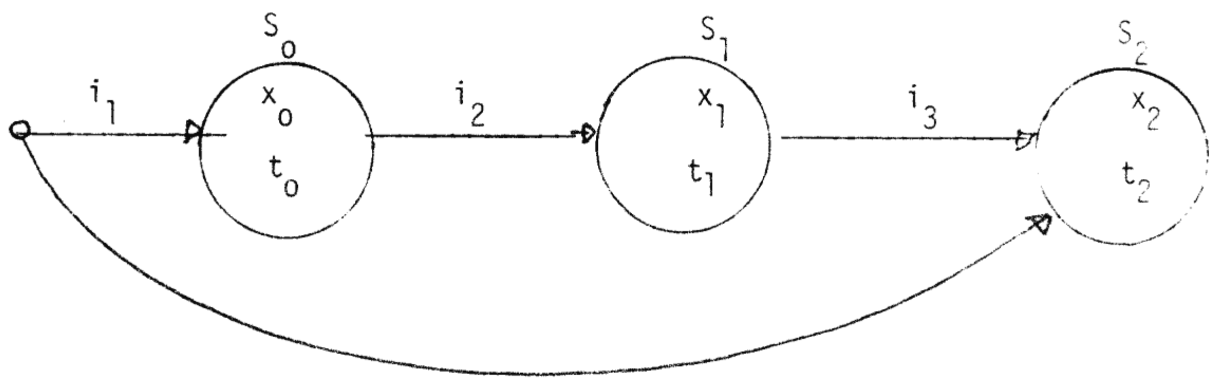
Se un sistema, partendo da x_o in t_o perfetto di un ingresso i_1, si porta allo stato x_1 nel tempo t_1, e partendo da x_1 in t_1 con i_2 si porta ad x_2 in t_2, lo stesso sistema, partendo dallo stato x_o in t_o e tramite un ingresso i_3, così definito:

$$i_3(t) = \begin{cases} i_1(t) & \text{se} \quad t \leq t_1 \\ i_2(t) & \text{se} \quad t > t_1 \end{cases}$$

si porterà direttamente allo stato x_2 in t_2. Cioé:

$$F[F(x_o,t_o,t_1,i_1),\ t_1,t_2,i_2] = F(x_o,t_o,t_2,i_3) \ .$$

Questa proprietà è caratterizzante per il concetto di stato di un sistema dinamico, come rappresentato in figura



Una siffatta descrizione del sistema, applicata sulle operazioni finanziarie, soddisfa le leggi di capitalizzazione, sconto ed auttualizzazione, sia nel caso discreto che nel caso continuo |4|, |5|.

Possiamo inoltre osservare che: l'insieme T dei valori assumibili dal parametro temporale t definisce poi un:

Sistema dinamico a parametro discreto $T = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$

Sistema dinamico a parametro continuo $T = \{t \mid t \geq 0\}$.

Una classe di sistemi a "tempo discreto" è quella per cui la funzione F è data indirettamente dalla relazione ricorrente:

$$x(t+1) = f[x(t), i(t), t] \tag{1}$$

che soddisfacendo automaticamente gli assiomi di causalità e composizione, soddisfa contemporaneamente l'equazione che regola il flusso monetario [5],[7],[8].

L'equazione del tipo (1) viene detta equazione di stato e la funzione f funzione di translazione (o di trasporto). Queste rappresentano anche il più generale sistema finanziario [8] [9] [10].

E' noto infatti che il reddito, frutto di un capitale, può essere interpretato come un flusso monetario sotto la cui influenza il capitale subisce delle variazioni nel tempo. Questo flusso è collegato al tasso di interesse, che può essere costante nel tempo o variabile.

Inoltre esso è collegato ad altri parametri di ingresso del tipo:

$$X = \{x_1, x_2, \ldots, x_k;\ t_1, t_2, \ldots, t_k; i_1, i_2, \ldots i_k; a, b, c.\} \tag{2}$$

che possono rappresentare capitale, tasso di interesse, di sconto, tempo di impiego, stabilità monetaria, congiuntura economica, solvibilità, ecc. . Sotto l'influenza di questi parametri lo stato del sistema finanziario viene decomposto in un insieme di variabili di stato, alcune delle quali possono essere di carattere aleatorio. E' il caso dello studio sulle assicurazioni.

2 - IL SISTEMA FINANZIARIO COME "PROCESSO ALEATORIO". -

Sia S un sistema finanziario (detto anche stato del mondo) che possa assumere k stati distinti che indicheremo con $1,2,\ldots,k$.

Ci proponiamo di osservare il comportamento di S in istanti successivi $1,2,\ldots.$ valutando, per ogni istante, quale stato abbia assunto il sistema.

Dobbiamo supporre necessariamente che il sistema non sia deterministico, nel senso che ogni istante n, non sia possibile stabilire a priori quale stato sarà assunto dal sistema negli istanti successivi $n+1$, $n+2,\ldots$.

Sotto tale ipotesi indichiamo con S_n la variabile casuale rappresentata dallo stato che il sistema assume all'istante n. La S_n così definita, allora, è una variabile casuale che può assumere il generico valore secondo la seguente legge di probabilità:

$$(3) \qquad P(S_n = i/S_o = i_o, S_1 = i_1,\ldots,S_{n-1} = i_{n-1}) = A(S_n = i/S_{n-1} = i_{n-1})$$

Ovviamente l'insieme delle variabili casuali forma un processo aleatorio $X(t)$ discreto perché le variabili casuali sono definite per ogni intero t non negativo.

Il processo $X(t)$ così definito è valido anche quando il suo campo di variazione in $(0,1)$ è decomponibile in n parti [11], [12]. In base alla (3) inoltre, agli effetti della previsione dello stato che il sistema finanziario assumerà al tempo n, è essenziale solamente la conoscenza dello stato che il sistema ha assunto al tempo $n-1$ e non anche la conoscenza degli stati assunti nei tempi precedenti. E su questo fatto basiamo il nostro modello.

3. - DESCRIZIONE DEL MODELLO STRATEGICO . -

Quanto è stato detto precedentemente è inseribile direttamente nei processi aleatori caratterizzanti l'attività di gestione delle Compagnie di Assicurazione.

Questo inserimento implica, però, un certo numero di ipotesi che tendono sostanzialmente ad ammettere che una descrizione degli stati futuri del "mondo" possa essere effettuata in termini di probabilità e che di conseguenza un problema di ottimizzazione possa essere espresso in termini di speranza matematica.

L'assioma di composizione visto in precedenza, ci porta a descrivere, seguendo il corso normale del tempo, gli stati del mondo in termini di probabilità e dedurne quindi la speranza matematica alla fine di ciascuno stato.

In tal modo, risalendo il corso del tempo, possiamo definire di stato in stato, una strategia che sia ottimale per l'Impresa assicurativa onde questa possa assicurarsi un guadagno medio positivo al termine dell'operazione finanziaria. Ogni fase di questo processo di iterazione di stato in stato, fornisce simultaneamente la speranza matematica e la strategia ottimale per lo stato successivo. E' necessario, dunque, per un'impresa assicurativa, scegliere una strategia di comportamento che potrà essere completa o incompleta [13], ma che comunque, per un dato tipo di sinistri, fornisca un rapporto costante tra il premio richiesto ed il montante del capitale assicurato [14]. E ciò perché, qualunque sia la strategia adottata dalla Impresa assicurativa, questa non ha che da effettuare operazioni a guadagno medio probabile positivo tali che possano stabilire contemporaneamente un compromesso tra il pieno di conservazione ed i rischi di rovina, e ciò al fine di non compromettere la propria stabilità.

Supponiamo, allora, che un'Impresa assicurativa disponga, ad un dato istante di un portafoglio Z_{n-1}, e che inoltre successivamente al periodo già considerato, entreranno a far parte del portafoglio dell'Impresa, ulteriori polizze D_n, con le quali essa realizzerà un guadagno medio aleatorio X_n, di cui conosciamo la legge di probabilità [11] [12] [13] [15], ma non il valore effettivo che assumerà.

Per esempio la funzione di ripartizione di X_n sarà:

$$(4) \qquad F_n(x,x_{n-1}) = \text{Prob}\{X_n \leq x | x_{n-1}\}$$

il che significa che la legge di probabilità di X_n dipende dal valore x_{n-1} assunto da X_{n-1}, ossia che, la successione di polizze stipulate che entrano a far parte del sistema aleatorio, sono in catena semplice.

Conveniamo di indicare con a_n le spese di acquisizione dei contratti assicurativi, con b_n le spese di gestione dell'impresa, con c_n il livello di rischiosità che assume l'Impresa stessa. La strategia σ fissata allora ad un dato istante, è una speranza matematica e deve rappresentare una relazione atta alla determinazione di una decisione condizionale $\mathbf{D}_n$ in funzione di tutti i dati del momento, H_n, supposti noti. Una tale relazione può per esempio essere del tipo funzionale:

$$(5) \qquad \mathbf{D}_n(H_n) = \phi(n;a_n;b_n;c_n;Z_{n-1};x_{n-1};F_n)$$

che abbiamo definito come strategia completa. Intendendo per strategia incompleta quella strategia in cui si verifica nella (5) la mancanza di uno o più dati riguardanti la decisione. E' chiaro che una tale strategia deve essere revisionata periodo per periodo. Comunque, però, il risultato in termini di decisione $\mathbf{D}_n$ sarà lo stesso qualunque sia il volume del portafoglio dell'Impresa assicurativa all'atto della decisione.

Ma dobbiamo ancora formulare alcune ipotesi essenziali, se vogliamo, seguendo il corso normale del tempo, ricercare l'optimum della strategia. Tali ipotesi si rendono necessarie poiché, descrivendo gli stati del mondo in termini di probabilità, l'Impresa può far corrispondere ad una strategia qualunque, una previsione e descrizione della sua attività futura e quindi dei suoi futuri risultati, espressi sempre in termini di probabilità, e dedurre quindi la speranza matematica attualizzata di tali risultati [13].

Ipotesi a Tutti gli stati del mondo, realizzabili nel futuro, possono essere definiti anticipatamente.

Ipotesi b All'inizio del periodo t, l'Impresa assicurativa sulla base dell'insieme delle informazioni attuali ${}_p h_t$ di cui dispone, e della decisione D_t che ha preso, fa corrispondere a ciascun "stato", capace di realizzarsi durante il periodo t, una probabilità soggettiva (del tipo Bayesiano) ben definita ad un guadagno medio altrettanto ben definito.

Ipotesi c L'optimum dell'Impresa scaturisce quando si massimizzano (o minimizzano) certe speranze matematiche.

Ipotesi d I dati anteriori alla decisione dell'Impresa assicurativa possono essere ignorati da questa all'inizio del periodo t, quindi non vanno considerati preliminari né pregiudiziali a D_t.

In tal modo, il modello, che stiamo per formulare, si compone di due parti:

1°) L'Impresa di assicurazione di cui studiamo il comportamento.

2°) Il rimanente dell'universo, che indichiamo con il termine "mondo".

Lo sviluppo del modello avviene per periodi elementari successivi a partire da un istante iniziale prestabilito. Conveniamo inoltre di assumere come periodo elementare t, l'intervallo di tempo compreso fra due decisioni successive dell'Impresa, D_t, D_{t+1}. Dobbiamo ancora osservare che l'Impresa, non appena presa la decisione D_t, passa dallo stato aleatorio a quello noto; cioè dallo stato S_t ad s_t. Ma nel momento in cui l'Impresa è sul punto di prendere la decisione D_t, supponiamo, per ipotesi, che questa conosca:

a) la serie passata degli stati del mondo:

$s_1, s_2, \dots, s_{t-1}$ cioè ${}_p s_t$

b) la serie passata delle proprie decisioni:

$D_1, D_2, \dots, D_{t-1}$ cioè ${}_p D_t$

L'insieme dei dati a) e b) lo indicheremo con ${}_p h_t$. A ciascun insieme di informazioni ${}_p h_t$, a ciascuno degli s_t ed a ciascuna delle D_t, l'Impresa assicurativa può far corrispondere una spesa totale d'esercizio ben definita, che indichiamo con $C_t({}_p h_t, s_t, D_t)$, sostenuta durante l'esercizio nel periodo t in funzione dei prezzi di mercato, dei tassi, dei sinistri risarciti, ecc. . Conveniamo ancora di indicare le variabili aleatorie con le lettere maiuscole e queste, una volta divenute note, le indicheremo con le lettere minuscole corrispondenti.

4. - FORMULAZIONE DEL MODELLO DI STRATEGIA. -

Cominciamo con il dire che l'Impresa assicurativa trovandosi a scegliere tra decisioni condizionate da informazioni che abbiamo indicato come "dati del momento di decisione", deve scegliere una strategia $\sigma \simeq \sigma_t({}_p h_t)$ cui corrisponde una decisione D_t che rende minimo il danno medio (13) (rischio) dato dalla relazione:

(6) $$R(S_t^i, \sigma) = \mathcal{M}[f_t(S_t)]\{\ell[S_t^i\ \sigma_t^i]\}$$

dove con ℓ abbiamo indicato il danno medio, $\mathcal{M}[f_t[S_t^i\ \sigma_t^i]$ è la speranza matematica di $f_t(S_t)$, essendo f_t funzione della variabile aleatoria S_t, σ_t^i rappresentano le componenti della strategia $\simeq \sigma_t^i({}_p h_t)$.

Introduciamo ancora i seguenti simboli:

Δ_t, decisioni aleatorie dell'Assicuratore all'inizio del tempo t

Δ_t^i , componenti aleatorie delle decisioni, che poi divengono D_t^i

${}_p h_t = ({}_p s_t\ D_t) = ({}_p h_{t-1}; s_{t-1}; D_{t-1})$ informazioni disponibili alla fine del periodo $t-1$

$G_t({}_p h_t;\ s_t;\ D_t)$ spesa di gestione nel periodo t.

Siano inoltre I_t il tasso di interesse posticipato annuo aleatorio fra t e $t+1$, i_t sia il tasso noto a $\sigma = \sigma_t({}_p h_t)$, la strategia.

Assumiamo come dato iniziale quello che si trova realizzato alla fine del periodo $t-1$, dove l'insieme delle informazioni attuali risulta:

(7) $${}_p h_t \simeq ({}_p h_{t-1}; s_{t-1};\ D_{t-1})$$

Consideriamo il periodo t. Osserviamo che a ${}_p h_t$ la strategia σ_t porta ad una decisione:

$$(8) \qquad D_t = \sigma_t({}_p h_t) \quad .$$

In virtù dell'ipotesi b) l'Impresa può far corrispondere a ciascuno stato eventuale S_t una probabilità ed una spesa (o costo). L'Impresa può quindi calcolare la speranza matematica relativa al periodo t e attualmente alla fine del periodo $t-1$ attraverso il fattore di attualizzazione [8], [15] $\dfrac{1}{1-i_{t-1}}$

Passiamo adesso al tempo $t+1$, continuiamo a porci sempre alla fine del periodo $t-1$. L'insieme delle informazioni che saranno disponibili alla fine del periodo t, è allora un vettore aleatorio:

$$(9) \qquad {}_p H_{t+1} \equiv ({}_p h_t ; D_t ; S_t)$$

con la legge di probabilità nota, essendo nota la legge di S_t. A tale vettore, la strategia σ fa corrispondere una eventuale decisione $\Delta_{t+1} = \sigma_{t+1}({}_p H_{t+1})$; alla coppia $({}_p H_{t+1} ; E_{t+1})$ corrisponderà quindi una spesa C_{t+1}. La probabilità di realizzazione della coppia precedente è data dalla relazione

$$(10) \qquad \mathrm{Prob}({}_p H_{t+1} ; S_{t+1}) = \mathrm{Prob}({}_p H_{t+1}) \, \mathrm{Prob}(S_{t+1})$$

quando siano dati ${}_p H_{t+1}$ e $\sigma_{t+1}({}_p H_{t+1})$, possiamo calcolare con una sommatoria su tutte le eventuali coppie $({}_pH_{t+1};S_{t+1})$ la speranza matematica relativa al periodo $t+1$ ed attualizzarla al tempo t sempre tramite il fattore aleatorio di attualizzazione $\frac{1}{1+I_t}$ tenuto conto che $I \in S_t \in {}_pH_{t+1}$. La speranza matematica così ottenuta, la si attualizza ancora al tempo $t-1$, ma questa volta tramite il fattore $\frac{1}{1+i_{t-1}}$.

Continuando con lo stesso procedimento al tempo $t+2$, avremo che le informazioni disponibili alla fine del periodo $t+1$, forniscono un vettore aleatorio del tipo:

$$(11) \qquad {}_pH_{t+2} \cong ({}_pH_{t+1};\ \Delta_{t+1};\ S_{t+1})$$

con legge di probabilità nota e sul quale operiamo come nel periodo precedente, e così via. Otteniamo così una strategia per il calcolo degli elementi della speranza matematica dell'impresa assicurativa nei tempi succ succevi $t+1;t+2;\ldots$. Ad ogni strategia, poi, potendo calcolare il danno medio, fornito dalla (6) possiamo associare la speranza matematica di questo danno medio (o rischio), tramite la relazione:

$$B(\sigma_t) = \sum_{t=1}^{n} R(S_t;\sigma)\ \mathrm{Prob}(S_t)\ .$$

La speranza matematica attualizzata dell'Impresa assicurativa risulta così la somma di una serie, in generale convergente a causa della presenza del fattore di attualizzazione $\frac{1}{1+i_{t-1}}$.

Questa speranza matematica è proprio un funzionale del tipo (5) dipendendo esso dalla funzione o dall'insieme delle funzioni, determinanti la strategia σ.

In conclusione, siamo in grado di confrontare le strategie adottate e diremo che la strategia σ è migliore di una strategia σ^1 se porta ad una speranza attualizzata, delle spese totali e del livello di rischiosità, meno alta; mentre una strategia ottimale σ_0 per un_Impresa assicurativa deve essere tale da migliorare ogni altra strategia σ. La strategia σ_0 deve essere inoltre in grado di far corrispondere ad ogni trasporto elementare di probabilità una diminuzione della spesa o un aumento del guadagno medio. Solo così essa potrà costituire una preferibilità assoluta di decisione per l'impresa assicurativa.

Accettato per la pubblicazione su
parere favorevole del Prof. Giuseppe CHIASSINO

B I B L I O G R A F I A

[1] B.De Finetti: "La teoria del rischio ed il problema della rovina dei giocatori". G.I.I.A. - Roma -

[2] I.Dubordieu: " Théorie Mathématique du risque dans le assurans de répartition" Cap. V par. 8. Ed. Gauthier Villars - Parigi 1957 .

[3] Kalman.R.E.Falb: " Topics in Mathematical System Theory" Mc. Graw Hill- 1969 N. York.

[4] F. Sibirani: "Lezioni di Matematica Finanziaria" Vol. II pp. 130-150. Ledam Padova - 1968.

[5] J.P.Mc Kenna:"Aggregate Economic Analysis" - pag. 257-261 - Ed. Holt-London 1974.

[6] Granger.C.W.: "Spectral Analysis of economics times" - Ed. Princeton - N. Jersey 1974.

[7] J.J.Horning: " Process Structuring" Computing Surveys Vol. 5 n° 1 March 1978 London. -

[8] M. Giordano: "Corso di Matematica Finanziaria" - Istituto di Matematica - Università Lecce 1978.

[9] M.Giordano: "Su una certa analogia elettro finanziaria" Progress in Cybernetics and System. Research. Vol. 1 - Hemisfere Publishing - Corporation - Washington

[10] M. Giordano:"Una particolare configurazione dinamica della matemtica finanziaria "- Istituto di Matematica Lecce - R. 9-1978.

[11] W. Feller: "An introduction to Probability theory and its applications". Vol.1 Wiley N. York 1959.

[12] H.Cramer: "The elements of probability Theory". J. Wiley N. Kork 1966.

[13] L. Daboni: "Calcolo delle probabilità ad elementi di Statistica" Utet Torino 1976.

[14] I. Fisher: "The theory of interest" pg.160-165 7ma Ed. Robbins 1964.

[15] L.Santiboni:"Lezioni di Matematica Finanziaria" Vol. 1-2 - Ed. Veschi - Roma 1974.