§ 2. Definizioni e risultati.

DEF.1.- Chiameremo famiglia dicotomica su (X,T) una famiglia $\mathfrak{D} = \{D_{k_1,k_2\dots k_n} \subset X;\ (k_1,\dots,k_n) \in \{0,1\}^n \quad n \in \mathbb{N}^+\}$ tale che

(2.1) $X = D_\circ \cup D_1 \quad , \qquad D_\circ \cap D_1 = \emptyset$

(2.2) $(\forall\ n \in \mathbb{N}^+)\ (\forall (k_1,\dots,k_n) \in \{0,1\}^n)(D_{k_1\dots k_n 0}\ ,\ D_{k_1\dots k_n 1}$ sono una partizione di $D_{k_1\dots k_n}$

(2.3) $(\forall n \in \mathbb{N}^+)(\forall m \in \mathbb{N})\ (\forall (k_1\dots k_n) \in \{0,1\}^n)(\exists x)(\forall i \leq m)(T^i x \in D_{k_1\dots k_n})$

dove $\mathbb{N}^+ = \{1,2,\dots\}$, $T^\circ = I$ identità, $T^{n+1} = T \circ T^n$.

Ogni insieme $D_{k_1\dots k_n}$ si dice un elemento di $\mathfrak{D}$ di livello n e se D_r è un generico elemento di $\mathfrak{D}$, $\ell(r)$ denoterà il livello a cui appartiene D_r.

DEF.2.- Dato lo spazio con massa $(X,\mathcal{Q},\mu)$ con $\mathcal{Q}$ algebra e μ massa, diremo che μ è continua se

(2.4) $\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ E_1,E_2,\dots,E_n \in \mathcal{Q}$ partizione di $X \quad \ni'\ \mu(E_k) < \varepsilon$
$\forall k \in \{1,2,\dots,n\}$

DEF.3.- Se $T : X \to X$ e $(X,\mathcal{Q},\mu)$ è uno spazio con massa diremo che T è misurabile se

(2.5) $\forall\ A \in \mathcal{Q}$ risulta $T^{-1}(A) \in \mathcal{Q}$

e diremo poi che T conserva la massa o che μ è invariante per T se

(2.6) $\forall\ A \in \mathcal{Q}$ risulta $\mu(T^{-1}(A)) = \mu(A)$

Ci proponiamo dato X e dato T di trovare delle condizioni affinché esista una massa continua su $\mathcal{P}(X)$ invariante per T.

Nel seguito considereremo lo spazio vettoriale

$$\mathcal{B}(X) = \{b : X \to \mathbb{R} \; ; \quad b \ \text{limitata}\}$$

ed il suo sottospazio

$$\mathcal{F} = \{f = b - bT \; ; \quad b \in \mathcal{B}(X)\}$$

Intendiamo provare che

Teorema (2.1). *Se esiste una famiglia dicotomica* $\mathcal{D}$ *su* (X,T) *allora esiste su* X *una massa continua invariante per* T.

DIM.-

E' sufficiente provare che esiste un funzionale lineare e monotono $M : \mathcal{B}(X) \to \mathbb{R}$ tale che

$$(2.7) \qquad M(b \circ T) = M(b) \qquad \forall b \in \mathcal{B}(X)$$

$$(2.8) \qquad M(\chi_X) = 1 \qquad \text{e} \qquad M(\chi_{D_{k_1 \dots k_n}}) = \frac{1}{2^n}$$

Osserviamo subito che l'esistenza di un funzionale lineare non negativo che verifica la (2.7) non è un problema in quanto come conseguenza di un noto risultato di Robison (cfr. [3] oppure [2] pag. 237) possiamo affermare che vale il seguente

Lemma (2.1). Sia $X \neq \emptyset$ $\mathcal{G}$ un sottospazio vettoriale di $\mathcal{B}(X)$; $\mathcal{G} \neq \{0\}$, $T : X \to X$. c.n. e s. affinché $M : \mathcal{G} \to \mathbb{R}$, $M(g) \geq 0$, M lineare tale che

(i) $M(gT) = M(g) \qquad \forall g \in \mathcal{G}$

(ii) $\inf\{g(x);\ x \in X\} \leq M(g) \leq \sup\{g(x);\ x \in X\}$

è che

(iii) $\forall$ insieme finito di coppie (g_k, ℓ_k) con $g_k \in \mathcal{G}$ $\ell_k \in \mathbb{N}$ $k \in \{1,\dots,n\}$

si abbia $\{\sum_{k=1}^{n}(g_k-g_k\ T^{\ell_k})(x);\ x \in X\} \geq 0$

In particolare se prendiamo $\mathcal{C} = \mathcal{B}(X)$ la condizione (iii) diventa semplicemente

(iii)' $\forall\, b \in \mathcal{B}(X) \quad \sup\{(b - b\,T)(x)\ ;\ x \in X\} \geq 0$.

Infatti basta osservare che, ad esempio:

$$b_1 - b_1T^3 + b_2 - b_2T^2 = b - b\,T$$

se si pone

$$b = b_1 + b_1T + b_1T^2 + b_2 + b_2T$$

e che $b \in \mathcal{B}(X)$ se $b_1, b_2 \in \mathcal{B}(X)$.

Posto

$$p(b) = \sup\{b(x);\ x \in X\}$$

risulta evidentemente

$$p(\alpha b) = \alpha p(b) \qquad \forall \alpha \geq 0 \qquad \forall\, b \in \mathcal{B}(X)$$

$$p(b_1+b_2) \leq p(b_1) + p(b_2) \qquad \forall b_1, b_2 \in \mathcal{B}(X)$$

e la (iii)' può scriversi:

(iii)" $\quad \forall f \in \mathfrak{F} \quad ;\ p(f) \geq 0$

Proviamo la (iii)". Se non fosse vera $\exists f \in \mathfrak{F} \ni' p(f) < 0$

Quindi $\exists \varepsilon > 0 \quad \ni' \quad p(f) < -\varepsilon$ e $\forall x \in X$ risulta

$$f(x) < -\varepsilon$$

Se $f = b - b\,T$ risulta perciò

$$b(x) + \varepsilon < b(T(x)) \qquad \forall x \in X$$

quindi anche

$$b(T(x)) + \varepsilon < b(T^2(x)) \qquad \forall x \in X \qquad \text{e poi}$$

$$b(x) + 2\varepsilon < b(T^2(x)).$$

In generale $\forall n \in \mathbb{N}^+$ $\forall x \in X$ risulta

$$b(x) + n\,\varepsilon < b(T^n(x))$$

e quindi $\forall x \in X$

$$\lim_{n\to\infty} b(T^n(x)) = +\infty$$

cosa assurda in quanto per ipotesi b è limitata.

Per il Lemma (2.1) possiamo pertanto dire che

$\exists M : \mathcal{B}(X) \to \mathbb{R}$ lineare tale che $M(b) \geq 0$ $\forall b \in \mathcal{B}(X)$

e verifica le due condizioni (i) ed (ii).

E' verificata pertanto la condizione (2.7) mentre nulla si può dire sulla (2.8) (continuità della μ). L'ipotesi dell'esistenza di una famiglia dicotomica non è fin ora intervenuta, quindi in sostanza si è provato il seguente

Lemma (2.2). Se $X \neq \emptyset$ e $T : X \to X$ allora esiste sempre una massa su $\mathfrak{S}(X)$ invariante per T.

Osserviamo ora che la condizione (2.7) è equivalente alla condizione

(2.7)' $\qquad M(f) = 0 \qquad \forall f \in \mathfrak{F}$

quindi possiamo pensare di considerare M definito solo su $\mathfrak{F}$ e verificante la (2.7)' e cercare di estendere M a tutto $\mathcal{B}(X)$ in modo tale che sia verificata anche la condizione (2.8). Denotiamo con $I_{k_1 \ldots k_n} = \chi_{D_{k_1 \ldots k_n}}$.

Cominciamo con l'osservare che $\chi_X \in \mathcal{B}(X) - \mathfrak{F}$.

Se per assurdo fosse $\chi_X \in \mathfrak{F}$ allora $\exists b \in \mathcal{B}(X) \ni' \forall x \in X$

$$1 = b(x) - b(T(x)) \quad \text{e quindi} \quad b(x) = n + b(T^n x) \quad \forall x \in X$$

il che è impossibile per la limitatezza di b.

Poniamo

$$\mathfrak{F}' = L(\mathfrak{F}, \chi_X)$$

lo spazio vettoriale generato da $\mathfrak{F}$ e da χ_X. Per il lemma di Hahn-Banach possiamo estendere M ad $\mathfrak{F}$ in modo tale che sia

$$M(f) \leq p(f) \qquad \forall f \in \mathfrak{F}'$$

e ponendo $M(\chi_X) = \alpha$ con α arbitrario ed

$$\sup\{-p(-f+1)) - Mf; f \in \mathfrak{F}\} \leq \alpha \leq \inf\{p(f+1) - M f;\ f \in \mathfrak{F}\}$$

(cfr. [2] pag. 454)

Nel nostro caso essendo $Mf = 0 \quad \forall f \in \mathfrak{F}$ sarà

$$\sup\{-p(-f-1);\ f \in \mathfrak{F}\} \leq \alpha \leq \inf\{p(f+1);\ f \in \mathfrak{F}\}.$$

Proviamo che

(2.9) $\forall f \in \mathfrak{F} : p(f \pm 1) \geq 1.$

Se così non fosse $\exists f \in \mathfrak{F}$ $\exists\, \varepsilon > 0 \ni' p(f \pm 1) < 1 - \varepsilon$ allora se $f = b - b\,T$ avremmo

$$\forall x \in X \qquad b(x) - b(Tx) \pm 1 < 1 - \varepsilon$$

e poi $\forall x \in X \quad \forall\, n \in \mathbb{N} : b(x) < b(T^n x) - n\,\varepsilon$ se c'è $+$ e

$b(x) < b(T^n k) + (2 - \varepsilon)n$ se c'è $-$.

In entrambi i casi si va contro la limitatezza di b.

La (2.9) ci dice che

$$\sup\{-p(-f-1);\ f \in \mathfrak{F}\} \leq 1 \leq \inf\{p(f+1); f \in \mathfrak{F}\}$$

e quindi possiamo porre

(2.10) $$M(\chi_X) = 1 .$$

Essendo poi il generico elemento di $\mathfrak{F}'$ del tipo $g = f + \alpha$ con $f \in \mathfrak{F}$ ed $\alpha \in \mathbb{R}$ risulta $M\, g = \alpha$.

Considerato ora $I_\circ$ si prova che $I_\circ \notin \mathfrak{F}'$. Se così non fosse $\exists\, b \in \mathcal{B}(X)$ $\exists\, \alpha \in \mathbb{R}$

(2.11) $$I_\circ = b - b\,T + \alpha$$

Ora per la proprietà (2.3) $\forall m \in \mathbb{N}$ $\exists\, x_\circ \in D_0$ $\ni'$ $T^i x_\circ \in D_\circ$ $\forall i < m$.
Ciò significa per la (2.11) che

$$1 = b(x_\circ) - b(T(x_\circ)) + \alpha\ ,\ 1 = b(T\, x_\circ) - b(T^2 x_\circ) + \alpha, \dots$$

e poi

(2.12) $$b(x_\circ) = m(1-\alpha) + b(T^m\, x_\circ)$$

D'altro canto per la (2.3) applicata a D_1 si ha che

$\exists\, x_1 \in D_1$ $\ni'$ $T^i\, x_1 \in D_1$ $\forall\, i < m$ e per la (2.11)

$$0 = b(x_1) - b(T\, x_1) + \alpha\ ,\ 0 = b(T\, x_1) - b(T^2 x_1) + \alpha, \dots$$

cioé $$b(x_1) = b(T^m\, x_1) - \alpha\, m\ .$$

Poiché se fosse $\alpha \neq 0$ si andrebbe contro la limitatezza di b, non può che essere $\alpha = 0$ e tornando alla (2.12) si vede che questa è in contrasto con la limitatezza di b.

Si conclude quindi che la (2.11) non è possibile.
Si considera quindi il sottospazio vettoriale

$$\mathcal{F}_\circ = L(\mathcal{F}' \ , I_\circ)$$

e si prova che

$$\sup\{-p(-g-I_\circ) - M(g), g \in \mathcal{F}'\} \leq \frac{1}{2} \leq \inf\{p(g+I_\circ) - M(g);\ g \in \mathcal{F}'\}$$

Si può quindi porre

$$M(I_\circ) = \frac{1}{2} .$$

Il generico elemento di $\mathcal{F}_\circ$ è del tipo

$$g = b - b\,T + \alpha + \beta\, I_\circ$$

con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathcal{B}(X)$ e

$$M\, g = \alpha + \frac{\beta}{2} .$$

Dall'essere $\chi_X,\ I_\circ \in \mathcal{F}_\circ$ segue che anche $I_1 \in \mathcal{F}_\circ$ e risulta

$$M\, I_1 = M(\chi_X - I_\circ) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} .$$

Si prova ora che $I_{\circ\circ} \notin \mathcal{F}_\circ$ e quindi si considera

$$\mathcal{F}_{\circ\circ} = L(\mathcal{F}_\circ, I_{\circ\circ})$$

Si fa vedere che è possibile porre $M(I_{\circ\circ}) = \frac{1}{2^2}$ e poi osservato che $I_{01} \in \mathcal{F}_{\circ\circ}$ risulta $M(I_{01}) = \frac{1}{2^2}$.

Analogamente si prova che

$I_{01} \notin \mathcal{F}_{\circ\circ}$ e quindi si considera $\mathcal{F}_{10} = L(\mathcal{F}_{\circ\circ}, I_{10})$.

E' possibile porre $M(I_{10}) = \frac{1}{2^2}$ ed essendo $I_{11} \in \mathcal{F}_{10}$ risulta $M(I_{11})=$

Denotiamo con $p(k_1 \ldots k_n)$ e con $s(k_1 \ldots k_n)$ rispettivamente l'elemento precedente e l'elemento successivo a $k_1, \ldots, k_n$ nell'ordinamento $\mathcal{N}$:

$$0,1,00,01,10,11,000,001,\ldots\ldots$$

su $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{0,1\}^n$.

Supponiamo esteso M su $\mathfrak{F}_{k_1\ldots k_n,0} = L(\mathfrak{F}_{p(k_1,\ldots,k_n),0}\ I_{k_1,\ldots k_n\ 0})$

con $M(I_{k_1\ldots k_n\ 0}) = \frac{1}{2^{n+1}}$.

Poiché risulta

$$I_{k_1\ldots k_n} = I_{k_1\ldots k_n\ 0} + I_{k_1\ldots k_n\ 1}$$

è $\qquad I_{k_1\ldots k_n\ 1} \in \mathfrak{F}_{k_1\ldots k_n\ 0}$ $\qquad$ ed

$$M(I_{k_1\ldots k_n\ 1}) = \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^{n+1}} .$$

Il generico elemento di $\mathfrak{F}_{k_1\ldots k_{n,0}}$ è del tipo

$$(2.13)\quad g = b-b\ T + \sum_{\substack{\ell(r)=n+1\\ r\leq k_1\ldots k_n 0}} \alpha_r\ I_r + \sum_{\substack{\ell(s)=n\\ s>k_1\ldots k_n}} \alpha_s\ I_s$$

(dove $r = \{0,1\}^{n+1}$ $s\in\{0,1\}^n$ e $\leq$ è la relazione d'ordine su $\mathcal{N}$)

Proviamo che

$$I_{s(k_1\ldots k_n)\ 0} \notin \mathfrak{F}_{k_1\ldots k_n\ 0} .$$

Se così fosse per b, α_r ed α_s opportuni sarebbe

$$(2.14)\quad I_{s(k_1\ldots k_n)0} = b-b\ T + \sum_{\substack{\ell(r)=m+1\\ r\leq k_1\ldots k_n 0}} \alpha_r\ I_r + \sum_{\substack{\ell(s)=n\\ s>k_1\ldots k_n}} \alpha_s\ I_s \quad .$$

Per la (2.3) $\forall\ m \in \mathbb{N}$ $\quad \exists x_0 \in D_{s(k_1\ldots k_n)0}$ $\quad \ni'\ T^i\ x_0 \in D_{s(k_1\ldots k_n)0}$ $\forall i\cdot n$

ed avremmo:

$1 = b(x_o) - b(T\, x_o) + \alpha$ con $\alpha = \alpha_{s(k_1 \dots k_n)}$

e poi $b(x_o) = b(T^m\, x_o) + m(1-\alpha)$.

Per la (2.3) in corrispondenza di $m \in \mathbb{N}$ $\exists x_1 \in D_{s(k_1 \dots k_n),1}$ $\ni'$

$T^i\, x_1 \in D_{s(k_1,\dots,k_n)1}$ $\forall i < m$

e per la (2.13) si avrebbe

$$0 = b(x_1) - b(T\, x_1) + \alpha \quad \text{e poi}$$

$$b(x_1) = b(T^m\, x_1) - \alpha\, m.$$

Data la limitatezza di b non può che essere $\alpha = 0$ e quindi

$$b(x_o) = b(T^m\, x_o) + m.$$

Quest'ultima uguaglianza è in contrasto con la limitatezza di b e quindi la (2.14) non può verificarsi.

Consideriamo quindi lo spazio

$$\mathcal{F}_{s(k_1 \dots k_n)0} = L(\mathcal{F}_{k_1 \dots k_n\, 0}\, , I_{s(k_1 \dots k_n)0})$$

e proviamo che

$$\sup\{-p(-g-I_{s(k_1 \dots k_n)0}) - M(g)\, ,\ g \in \mathcal{F}_{k_1 \dots k_n\, 0}\} \leq \frac{1}{2^{n+1}} \leq$$

$$\leq \inf\{p(g + I_{s(k_1 \dots k_n)0}) - M(g);\ g \in \mathcal{F}_{k_1 \dots k_n\, 0}\}$$

Affermiamo che $p(g + I_{s(k_1 \dots k_n)0}) - M(g) \geq \frac{1}{2^{n+1}}$ $\forall g \in \mathcal{F}_{k_1 \dots k_n\, 0}$.

Se così non fosse $\exists g \in \mathcal{F}_{k_1 \dots k_n 0}$ $\ni'$

$$p(g + I_{s(k_1 \ldots k_n)0}) - M(g) < \frac{1}{2^{n+1}}$$

e precisamente per $b \in \mathcal{B}(X)$ ed α_r , $\alpha_s \in \mathbb{R}$ opportuni $\forall x \in X$

$$b(x) - b(T\,x) + \Sigma\,\alpha_r\, I_r\,(x) + \Sigma\,\alpha_s\, I_s(x) + I_{s(k_1 \ldots k_n)0}\,(x) < \beta$$

dove $\beta = \frac{1}{2^{n+1}} + M(g)$.

Per la (2.3) $\forall m \in \mathbb{N}$ $\exists x_0 \in D_{s(k_1 \ldots k_n)0}$ $\ni'$ $T^i x_0 \in D_{s(k_1 \ldots k_n)0}$ $\forall i < m$

e quindi

$$b(x_0) - b(T\,x_0) + \alpha + 1 < \beta \qquad \text{dove} \quad \alpha = \alpha_{s(k_1 \ldots k_n)}$$

ed iterando si ha

$$(2.15) \qquad b(x_0) < b(T^m\,x_0) + m(\beta - \alpha) - m$$

D'altro canto sempre per la (2.3) $\exists x_1 \in D_{s(k_1 \ldots k_n)1}$ $\ni'$

$T^i\,x_1 \in D_{s(k_1 \ldots k_n)1}$ $\forall i < m$ e quindi

$$b(x_1) - b(T\,x_1) + \alpha < \beta$$

ed iterando si ha

$$b(x_1) < b(T^m\,x_1) + m(\beta - \alpha)$$

La relazione precedente è possibile solo per $\beta = \alpha$ e tornando alla (2.15) si ha

$$b(x_0) < b(T^m\,x_0) - m$$

che è in contraddizione con la limitatezza di b.

Analogamente si prova che

$$-p(-g-I_{s(k_1\dots k_n)0}) - M(g) \leq \frac{1}{2^{n+1}} \qquad \forall g \in \mathcal{H}_{k_1\dots k_n 0} .$$

Si può quindi definire

$$M(I_{s(k_1\dots k_n)0}) = \frac{1}{2^{n+1}}$$

e poi essendo $I_{s(k_1\dots k_n)1} = I_{s(k_1\dots k_n)} - I_{s(k_1\dots k_n)0}$ si ha

$$M(I_{s(k_1\dots k_n)1}) = \frac{1}{2^{n+1}} .$$

Per induzione risulta quindi definito M su tutto

$$L(\mathcal{F}, \chi_X, \{I_{k_1\dots k_n} \qquad \forall k_1\dots k_n \in \{0,1\}^n \qquad \forall n \in \mathbb{N}\})$$

e per il teorema di Hahn-Banach può poi essere prolungato a tutto $\mathcal{B}(X)$.

∎

Osservazione.- Infine vogliamo ricordare che dal lavoro [1] segue che l'esistenza di una famiglia dicotomica è anche una condizione necessaria per l'esistenza di una massa continua ed invariante per T. Questa dimostrazione nel lavoro [1] è standard e quindi non abbiamo nulla da aggiungere.

Accettato per la pubblicazione su

proposta di R. Scozzafava