§ 2. Problema dell'unicità. - Esempio di non unicità.

Diamo un esempio di non unicità per il pdr unidimensionale con f di classe C^∞(2).

Per la costruzione è utile la seguente considerazione di facile verifica.

Sia $h \in C_0^\infty(R)$, $h \geq 0$, soddisfacente le condizioni

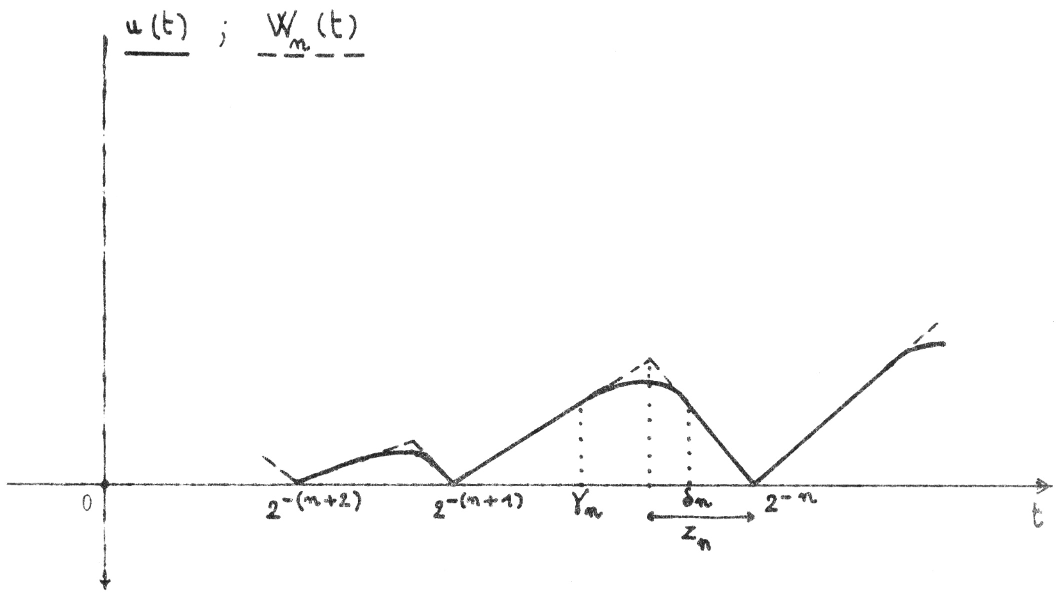
$$\int_R h(t)dt = 1 \qquad \text{e} \qquad \int_R t\, h(t)dt = 0 ,$$

allora, posto $(h * v)(t) = \int_R v(t-y)h(y)dy$, si ha

(a) $h * v$ è convessa se v è convessa,

(b) $h * v = v$ se $v(t) = at + b$.

Consideriamo ora



(2) Il fenomeno di non unicità ci è stato segnalato (oralmente) dal Prof. L. Amerio. Si confronti anche il lavoro di C. Citrini "Controesempi all'unicità del moto di una corda in presenza di una parete",Rend.Acc. Naz. Lincei.

$$W_n(t) = \max\{2^{-(n+1)^2}(2^{-(n+1)} - t);\ 2^{-n^2}(t-2^{-n})\} \quad \text{per} \quad 2^{-(n+1)} \le t \le 2^{-n}.$$

Sia $h \in C_0^\infty(R)$, $h \ge 0$, $h(t) = 0$ per $|t| \ge 1$ e

$$\int_{-1}^{1} h(t)dt = 1 \qquad , \qquad \int_{-1}^{1} t\cdot h(t)dt = 0 \quad .$$

Per ogni $n \in N$ poniamo $h_n(t) = 1/\beta_n\ h(t/\beta_n)$, dove, posto

$z_n = 2^{-(n+1)}(1+2^{n+1})^{-1}$ per ogni $n \in N$, è

$$0 < \beta_n = 5^{-1}\ z_n \ .$$

Posto $u(t) = (h_n * W_n)(t)$ per $2^{-(n+1)} \le t \le 2^{-n}$, risulta $u(t) \le 0$.

Inoltre esistono (γ_n) , (δ_n) con $2^{-(n+1)} < \gamma_n < z_n < \delta_n < 2^{-n}$

per cui

$$2^{-(n+1)} \le t \le \gamma_n \quad \text{e} \quad y \in \text{supp } h_n : W_n(t-y) = a_n(t-y) + b_n \ ,$$

$$\delta_n \le t \le 2^{-n} \quad \text{e} \quad y \in \text{supp } h_n : W_n(t-y) = a'_n(t-y) + b'_n \ .$$

Ne segue, cfr. (b),

$$u(t) = W_n(t) \quad \text{per} \quad 2^{-(n+1)} \le t \le \gamma_n \quad \text{o} \quad \delta_n \le t \le 2^{-n} \ .$$

Inoltre per la (a) $\ddot{u}(t) \ge 0$. E' altresì evidente che $u(0) = \dot{u}^+(0) = 0$.

Posto, in $[0,1]$, $f(t) = \ddot{u}(t)$, f risulta traccia di una funzione di classe C^∞. Consideriamo il pdr in $\bar{\Omega} = [0,1]$ col dato f e condizione iniziale ammissibile $(0,0)$ nello zero.

E' evidente che la funzione $u(t)$ precedentemente costruita è soluzione di questo pdr con le condizioni iniziali assegnate.

E' facile altresì provare che la funzione identicamente nulla è anche so luzione dello stesso pdr.

§ 3. Alcune condizioni sufficienti per l'unicità della soluzione del pdr.

Sussiste il seguente

Teorema 2.- *Se* f *è costante a tratti in* $\bar{\Omega}$, *allora il pdr ammette una unica soluzione in* $\bar{\Omega}$ *verificante un assegnato dato iniziale ammissibile* (s,b).

Dimostrazione.-

E' sufficiente provare il teorema per $f(t) = c$ in $\bar{\Omega}$.
Per $c = 0$ l'unicità è ovvia; sia allora $c \neq 0$. Se u è soluzione del pdr verificante le condizioni $u(0) = s$, $\dot{u}^{+}(0) = b$, si ha (dalla (iv))

$$(6) \qquad \frac{1}{2}\left[\dot{u}^{\pm}(t)\right]^{2} = \frac{1}{2}\, b^2 - s\, c + c\, u(t) \qquad \text{per} \quad t \in \bar{\Omega}\,.$$

Da (6) ricaviamo, per $u(t) = 0$,

$$(7) \qquad \left[\dot{u}^{\pm}(t)\right]^{2} = b^2 - 2\, s\, c\,.$$

La tesi consegue, allora, in virtù di noti teoremi di unicità locale, dalle seguenti osservazioni.

1. Se è $b^2 - 2\,s\,c > 0$, tutti gli eventuali zeri di u sono isolati; inoltre se τ_1 e τ_2 sono due zeri consecutivi $(\tau_2 > \tau_1)$ si ha:

$$(8) \qquad c(\tau_2 - \tau_1) = 2\sqrt{b^2 - 2\,s\,c} \quad ;$$

da cui

$$(9) \qquad \tau_2 - \tau_1 = \frac{2}{c}\sqrt{b^2 - 2\,s\,c}\,.$$

Da (8) segue che