§ 2. Problema dell'unicità. - Esempio di non unicità.

Diamo un esempio di non unicità per il pdr unidimensionale con f di classe C^{∞}(2).

Per la costruzione è utile la seguente considerazione di facile verifica.

Sia $h \in C_0^{\infty}(R)$, $h \geq 0$, soddisfacente le condizioni

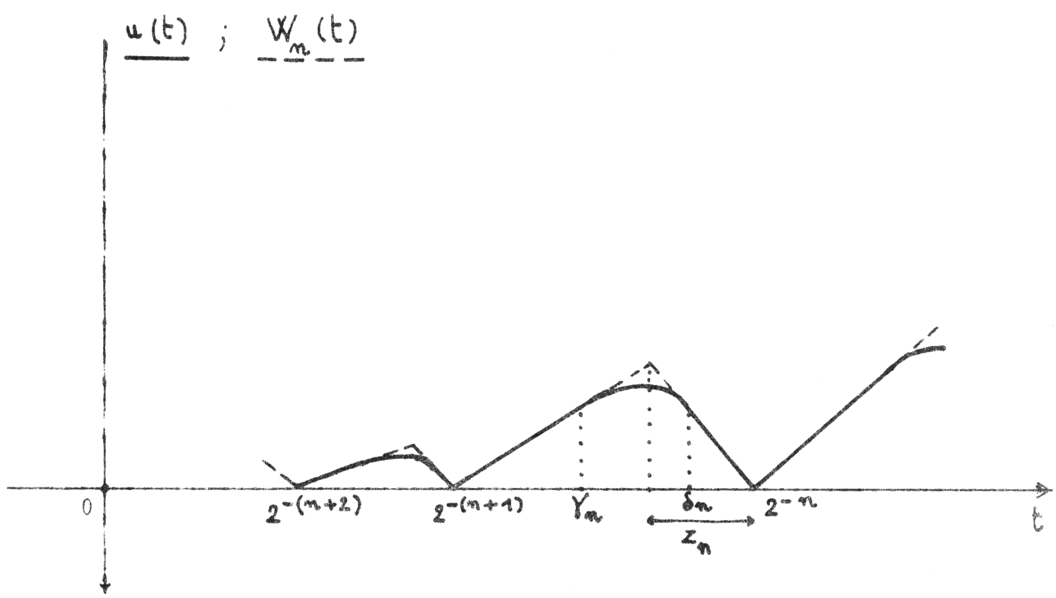
$$\int_R h(t)dt = 1 \qquad e \qquad \int_R t\, h(t)dt = 0 ,$$

allora, posto $(h * v)(t) = \int_R v(t-y)h(y)dy$, si ha

(a) $h * v$ è convessa se v è convessa,

(b) $h * v = v$ se $v(t) = at + b$.

Consideriamo ora



(2) Il fenomeno di non unicità ci è stato segnalato (oralmente) dal Prof. L. Amerio. Si confronti anche il lavoro di C. Citrini "Controesempi all'unicità del moto di una corda in presenza di una parete",Rend.Acc. Naz. Lincei.

luzione dello stesso pdr.

§ 3. Alcune condizioni sufficienti per l'unicità della soluzione del pdr.

Sussiste il seguente

Teorema 2.- *Se f è costante a tratti in $\bar{\Omega}$, allora il pdr ammette una unica soluzione in $\bar{\Omega}$ verificante un assegnato dato iniziale ammissibile (s,b).*

Dimostrazione.-

E' sufficiente provare il teorema per $f(t) = c$ in $\bar{\Omega}$.
Per $c = 0$ l'unicità è ovvia; sia allora $c \neq 0$. Se u è soluzione del pdr verificante le condizioni $u(0) = s$, $\dot{u}^{+}(0) = b$, si ha (dalla (iv))

$$(6) \qquad \frac{1}{2}\left[\dot{u}^{\pm}(t)\right]^2 = \frac{1}{2} b^2 - s\,c + c\,u(t) \qquad \text{per} \quad t \in \bar{\Omega}\,.$$

Da (6) ricaviamo, per $u(t) = 0$,

$$(7) \qquad \left[\dot{u}^{\pm}(t)\right]^2 = b^2 - 2\,s\,c\,.$$

La tesi consegue, allora, in virtù di noti teoremi di unicità locale, dalle seguenti osservazioni.

1. Se è $b^2 - 2\,s\,c > 0$, tutti gli eventuali zeri di u sono isolati; inoltre se τ_1 e τ_2 sono due zeri consecutivi $(\tau_2 > \tau_1)$ si ha:

$$(8) \qquad c(\tau_2 - \tau_1) = 2\sqrt{b^2 - 2\,s\,c} \qquad ;$$

da cui

$$(9) \qquad \tau_2 - \tau_1 = \frac{2}{c}\sqrt{b^2 - 2\,s\,c}\,.$$

Da (8) segue che