0. Il problema del rimbalzo unidimensionale.

Sia $\bar{\Omega} = [0,T]$, $f \in L^1(\bar{\Omega};R)$.

Definizione.-

Diremo che u, lipschitziana in $\bar{\Omega}$, è soluzione del pdr (problema del rimbalzo) se soddisfa le seguenti condizioni:

(i) $u \leq 0$ in $\bar{\Omega}$;

(ii) $\int_{\bar{\Omega}} [u(t)\, \ddot{\phi}(t) - f(t)\, \phi(t)]dt \leq 0$ per ogni $\phi \in C_o^\infty(\bar{\Omega}), \phi \geq 0$;

(iii) per $u<0$ $\int_{\bar{\Omega}} [u(t)\, \ddot{\phi}(t) - f(t)\, \phi(t)]dt = 0$ per ogni $\phi \in C_o^\infty(\bar{\Omega})$;

(iv) per ogni $t \in \Omega$ esistono $\dot{u}^+(t)$ ed $\dot{u}^-(t)$; esistono $\dot{u}^+(0)$, $\dot{u}^-(T)$ e si ha:

$$\frac{1}{2}[\dot{u}^{\pm}(t)]^2 = \frac{1}{2}[\dot{u}^+(0)]^2 + \int_0^t f(\eta)\, \dot{u}(\eta)\, d\eta \qquad \text{per} \quad t \in \bar{\Omega}$$

(conservazione dell'energia).

Osservazione I- L'esistenza per ogni $t \in \Omega$ della derivata destra $\dot{u}^+(t)$ e sinistra $\dot{u}^-(t)$ segue da (ii), osservato che la funzione

$$w(t) = u(t) - \int_0^t \left(\int_0^\eta f(\xi)d\xi\right)d\eta \qquad \text{è concava ed}$$

$$F(t) = \int_0^t \left(\int_0^\eta f(\xi)d\xi\right)d\eta \qquad \text{è derivabile con derivata prima continua.}$$

Diremo condizioni iniziali ammissibili per il pdr condizioni del tipo

$$u(0) = s \quad , \qquad \dot{u}^+(0) = b \quad ,$$

con $s < 0$, $b \in R$ oppure $s = 0$, $b \leq 0$.