Il problema del rimbalzo unidimensionale e sue approssimazioni con penalizzazioni non convesse(*)

M. Carriero - E. Pascali (**)

SUMMARY.- *An approximation theorem is shown via non convex penalized problems for the one-dimensional bounce problem.*

Then non uniqueness phenomenon and sufficient conditions for uniqueness are exhibited.

Introduzione.- Recentemente è stato proposto lo studio della G-convergenza per i problemi di rimbalzo.

In questa nota, come primo avvio a tale studio, si dimostra un teorema di approssimazione tramite penalizzazioni non convesse per il problema del rimbalzo in una dimensione.

Si illustra poi il fenomeno di non unicità e si danno condizioni sufficienti per l'unicità della soluzione.

Desideriamo ringraziare il Prof. E. De Giorgi per averci proposto questa ricerca e per le utili discussioni sull'argomento.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del CNR-Gnafa.

(**) Indirizzo degli autori: Istituto di Matematica, via Arnesano - 73100 Lecce

0. Il problema del rimbalzo unidimensionale.

Sia $\bar{\Omega} = [0,T]$, $f \in L^1(\bar{\Omega};R)$.

Definizione.-

Diremo che u, lipschitziana in $\bar{\Omega}$, è soluzione del pdr (problema del rimbalzo) se soddisfa le seguenti condizioni:

(i) $u \leq 0$ in $\bar{\Omega}$;

(ii) $\int_{\bar{\Omega}} [u(t)\, \ddot{\phi}(t) - f(t)\, \phi(t)]dt \leq 0$ per ogni $\phi \in C_0^\infty(\bar{\Omega}), \phi \geq 0$;

(iii) per $u<0$ $\int_{\bar{\Omega}} [u(t)\, \ddot{\phi}(t) - f(t)\, \phi(t)]dt=0$ per ogni $\phi \in C_0^\infty(\bar{\Omega})$;

(iv) per ogni $t \in \Omega$ esistono $\dot{u}^+(t)$ ed $\dot{u}^-(t)$; esistono $\dot{u}^+(0)$, $\dot{u}^-(T)$ e si ha:

$$\frac{1}{2}[\dot{u}^{\pm}(t)]^2 = \frac{1}{2}[\dot{u}^+(0)]^2 + \int_0^t f(\eta)\, \dot{u}(\eta)\, d\eta \qquad \text{per } t \in \bar{\Omega}$$

(conservazione dell'energia).

Osservazione I- L'esistenza per ogni $t \in \Omega$ della derivata destra $\dot{u}^+(t)$ e sinistra $\dot{u}^-(t)$ segue da (ii), osservato che la funzione

$$w(t) = u(t) - \int_0^t (\int_0^\eta f(\xi)d\xi)d\eta$$ è concava ed

$$F(t) = \int_0^t (\int_0^\eta f(\xi)d\xi)d\eta$$ è derivabile con derivata prima continua.

Diremo condizioni iniziali ammissibili per il pdr condizioni del tipo

$$u(0) = s \quad , \quad \dot{u}^+(0) = b \quad ,$$

con $s < 0$, $b \in R$ oppure $s = 0$, $b \leq 0$.

§ 1. Approssimazioni con penalizzazioni non convesse per il pdr unidimensionale e teorema di esistenza.

Sia (u_h) una successione di funzioni per cui si abbia

$$u_h \in C^1(\bar{\Omega};R) \quad ; \ddot{u}_h \in L^1(\bar{\Omega};R) \qquad \text{e}$$

$$\ddot{u}_h(t) + \psi_h(u_h(t)) = f(t) \qquad \text{in} \qquad \bar{\Omega} .$$

Su f e ψ_h (termine di penalizzazione) facciamo le seguenti ipotesi:

(1) $\quad f \in L^1(\bar{\Omega};R)$;

(2) $\quad \psi_h \in C^\circ(R;R)$

$$\psi_h(\xi) \begin{cases} = 0 & \text{per} \quad \xi \leq 0 \\ > 0 & \text{per} \quad \xi > 0 \end{cases} ;$$

$(3)_1$ comunque si fissino ξ_1, ξ_2 (con $0 < \xi_1 < \xi_2$)

$\lim\limits_h \psi_h(\xi) = +\infty$ uniformemente per $\xi_1 \leq \xi \leq \xi_2$;

$$(3)_2 \quad \lim_{\substack{\xi \to 0^+ \\ h}} \frac{\psi_h(\xi)}{\int_0^\xi \psi_h(\eta)d\eta} = +\infty \text{ (1)}.$$

Sussiste il seguente

---

(1) Per esempio si può prendere

$$\psi_h(\xi) = h[\xi^3 + |\xi|^3 - \frac{5}{3}(\xi^5 + |\xi|^5) + \xi^7 + |\xi|^7].$$

Lemma 1.- *Comunque si fissi una condizione iniziale* (s,b) *ammissibile per il pdr, ogni successione* (u_h) *di soluzioni dei problemi*

$$(P_h)\quad \begin{cases} \ddot{u}_h(t) + \psi_h(u_h(t)) = f(t) & \text{in} \quad \bar{\Omega} \\ u_h(0) = s \\ \dot{u}_h^+(0) = b \end{cases}$$

verifica le seguenti condizioni

[A] (u_h) *è equilipschitziana (quindi equicontinua) ed equilimitata;*

[B] *posto* $\alpha_h(\xi) = \int_0^\xi \psi_h(\eta)d\eta$,

esiste $c > 0$ *per cui*

$$0 \leq \alpha_h(u_h(t)) \leq c \qquad \text{per ogni } h \in N \quad \text{e} \quad t \in \bar{\Omega}\ ;$$

[C] *per ogni* $t \in \bar{\Omega}$ *risulta*

$$\max_h \lim u_h(t) \leq 0.$$

Dimostrazione.-

[A] Da (P_h) si ottiene l'identità dell'energia

$$(\dot{u}_h(t)\ddot{u}_h(t) + \dot{u}_h(t)\ \psi_h(u_h(t)) = f(t)\dot{u}_h(t) \qquad \text{in} \qquad \bar{\Omega}\ ;$$

$$\frac{1}{2}\ \frac{d}{dt}\ \dot{u}_h^2(t) + \dot{u}_h(t)\ \psi_h(u_h(t)) = f(t)\dot{u}_h(t) \qquad \text{in} \qquad \bar{\Omega} \quad \text{e quindi)}$$

$$(4)\ \frac{1}{2}\ \dot{u}_h^2(t) = \frac{1}{2}\ b^2 - \alpha_h(u_h(t)) + \int_0^t \dot{u}_h(\eta)\ f(\eta)d\eta \qquad \text{per} \quad t\in\bar{\Omega}\ .$$

Allora

$$0 \leq \frac{1}{2}\ \dot{u}_h^2(t) \leq \frac{1}{2}\ b^2 + \int_0^t |f(\eta)||\dot{u}_h(\eta)|d\eta \leq \frac{1}{2}\ b^2 + ||f||_{L^1(\bar{\Omega};R)} \cdot ||\dot{u}_h||_{C^\circ(\bar{\Omega};R)}$$

per ogni $t \in \bar{\Omega}$ e per ogni $h \in N$.

Quindi

$$||\dot{u}_h||^2_{C^\circ(\bar{\Omega};R)} \leq b^2 + 2\,||f||_{L^1(\bar{\Omega};R)} \cdot ||\dot{u}_h||_{C^\circ(\bar{\Omega};R)}$$ per ogni $h \in N$, pertanto

(5) $||\dot{u}_h||_{C^\circ(\bar{\Omega};R)} \leq$ costante (indipendente da h).

Da (5) segue [A] .

[B] Segue da (4) e (5), tenuto conto dell'ipotesi su f.

[C] Supponiamo che per $\bar{t} \in \bar{\Omega}$ si abbia

$$\max_h \lim_h u_h(\bar{t}) > \sigma > 0;$$

ne segue che per una opportuna estratta di $(u_h(\bar{t}))$, $(u_{h(k)}(\bar{t}))$, riesce

$$u_{h(k)}(\bar{t}) > \sigma > 0.$$

Allora, per (2),

$$\int_{\sigma/2}^{\sigma} \psi_{h(k)}(\xi)d\xi \leq \int_{s}^{u_{h(k)}(\bar{t})} \psi_{h(k)}(\xi)d\xi = \alpha_{h(k)}(u_{h(k)}(\bar{t})) \leq c\ ;$$

contro l'ipotesi $(3)_1$. ■

Teorema 1.- *Se (u_h) (con u_h soluzione del problema (P_h)) converge uniformemente in $\bar{\Omega}$ ad una funzione u, allora u è soluzione del pdr.*

La dimostrazione si articola in diversi punti. Intanto u è lipschitziana in $\bar{\Omega}$ (per [A]) ed è non positiva (per [C]).

Proviamo (ii).

Sia $\phi \in C_0^\infty(\bar{\Omega})$, $\phi \geq 0$; per ogni $h \in N$ si ha

$$\int_{\Omega} [\ddot{u}_h(t) - f(t)]\, \phi\,(t)\, dt = - \int_{\bar{\Omega}} \psi_h(u_h(t))\, \phi(t)\, dt \leq 0,$$

quindi

$$\int_{\Omega} u_h(t)\, \ddot{\phi}(t)\, dt - \int_{\Omega} f(t)\, \phi(t)\, dt \leq 0 \; ;$$

allora, passando al limite rispetto ad h, riesce

$$\int_{\bar{\Omega}} u(t)\, \ddot{\phi}(t)\, dt - \int_{\bar{\Omega}} f(t)\, \phi(t)\, dt \leq 0 \; .$$

Dimostriamo,ora, la condizione (iii).

In ogni compatto $K \subset \{t \in [0,T] \mid u(t) < 0\}$ risulta $u_h(t) < 0$ definitivamente e quindi $\ddot{u}_h(t) = f(t)$ definitivamente; ne segue $\ddot{u}(t) = f(t)$.

E' così provata l'esistenza di $\dot{u}$ per $u(t) < 0$ e l'esistenza di $\dot{u}^+$ ed $\dot{u}^-$, per l'osservazione I.

Resta da provare la conservazione dell'energia.

Osserviamo preliminarmente che esiste una costante $c_0 > 0$ (indipendente da $h \in N$) per cui

$$0 \leq \int_{\bar{\Omega}} \psi_h(u_h(t))\, dt \leq c_0 \; .$$

La funzione

$$w(t) = u(t) - \int_0^t \left(\int_0^{\eta} f(\xi)\, d\xi \right) d\eta$$

è limite uniforme della successione di funzioni concave

$$w_h(t) = u_h(t) - \int_0^t \left(\int_0^{\eta} f(\xi) d\xi \right) d\eta \quad .$$

Perciò $w(t)$ è concava, derivabile q.o. in $\bar{\Omega}$ e risulta

$$\lim_h \dot{w}_h(t) = \dot{w}(t) \qquad \text{q.o.} \qquad \text{in} \qquad \bar{\Omega} \; .$$

Ne segue che $\lim_h \dot{u}_h(t) = \dot{u}(t)$ q.o. in $\bar{\Omega}$.

Dalla (4) si deduce che, q.o. in $\bar{\Omega}$, esiste $\lim_h \alpha_h(u_h(t))$.

Proviamo che risulta

$$\lim_h \alpha_h(u_h(t)) = 0 \qquad \text{q.o. in } \bar{\Omega} .$$

Osserviamo subito che se $u(t) < 0$ riesce $\lim_h \alpha_h(u_h(t)) = 0$.

Basterà allora provare che

$$\lim_h \alpha_h(u_h(t)) = 0 \qquad \text{q.o. in } \Omega_o ,$$

essendo $\Omega_o = \{t \in \bar{\Omega} \mid u(t) = 0\}$.

Osservando che è

$$\lim_h \int_{\Omega_o} \alpha_h(u_h(t))\, dt = \int_{\Omega_o} \lim_h \alpha_h(u_h(t))dt ,$$

supponiamo che sia

$$\lim_h \int_{\Omega_o} \alpha_h(u_h(t))\, dt > p > 0.$$

Fissato $M > 0$, con $Mp > c_o$, esiste, per $(3)_2$, $\delta > 0$ per cui se $0 < \xi < \delta$ riesce

$$M < \frac{\psi_h(\xi)}{\int_o^\xi \psi_h(\eta)d\eta} \qquad \text{definitivamente;}$$

quindi $\xi < \delta : M \int_o^\xi \psi_h(\eta)d\eta \leq \psi_h(\xi)$ definitivamente.

Siccome (u_h) converge uniformemente a zero sul compatto Ω_o, si ottiene $|u_h(t)| < \delta$, definitivamente, in Ω_o.

Allora, per $t \in \Omega_o$, è, definitivamente

$$0 \leq M \int_o^{u_h(t)} \psi_h(\eta)\, d\eta = M\, \alpha_h(u_h(t)) \leq \psi_h(u_h(t)) .$$

Integrando su Ω_o , si ottiene, definitivamente

$$Mp \leq M \int_{\Omega_o} \alpha_h(u_h(t))\, dt \leq \int_{\Omega_o} \psi_h(u_h(t))dt \leq \int_{\bar{\Omega}} \psi_h(u_h(t))dt \leq c_o \,,$$

il che è un assurdo.

Allora

$$\frac{1}{2}\, [\dot{u}^{\pm}(t)]^2 = \frac{1}{2}\, b^2 + \int_0^t f(\eta)\, \dot{u}\,(\eta)d\eta \qquad \text{q.o. in} \quad \bar{\Omega}\,.$$

Osservato che, nei punti in cui u non è derivabile, riesce

$$\lim_{t \to \tau^{\pm}} \dot{u}(t) = \dot{u}^{\pm}(\tau)$$

(e che tali punti costituiscono un insieme Ω_1 finito o numerabile), ne segue che le funzioni $[\dot{u}^{\pm}]^2$ sono prolungabili per continuità su tali punti e siccome coincidono con una stessa funzione continua in $\bar{\Omega} \setminus \Omega_1$ allora vale la (iv). ■

Concludiamo con il seguente

Corollario.

Nelle ipotesi poste, per ogni dato iniziale (s,b) *ammissibile per il pdr esiste almeno una soluzione del pdr in* $\bar{\Omega}$ *con dati iniziali* (s,b)*; essa è limite uniforme in* $\bar{\Omega}$ *di una successione* (u_h) *di soluzioni del problema* (P_h).

Dimostrazione.

Per la [A] del lemma 1, fissata una qualsiasi successione (u_h) (di soluzioni di (P_h)) esiste una estratta uniformemente convergente ad una funzione u, soluzione del pdr in $\bar{\Omega}$ (per il teorema 1). ■

§ 2. Problema dell'unicità. - Esempio di non unicità.

Diamo un esempio di non unicità per il pdr unidimensionale con f di classe C^{∞}(2).

Per la costruzione è utile la seguente considerazione di facile verifica.

Sia $h \in C_0^{\infty}(R)$, $h \geq 0$, soddisfacente le condizioni

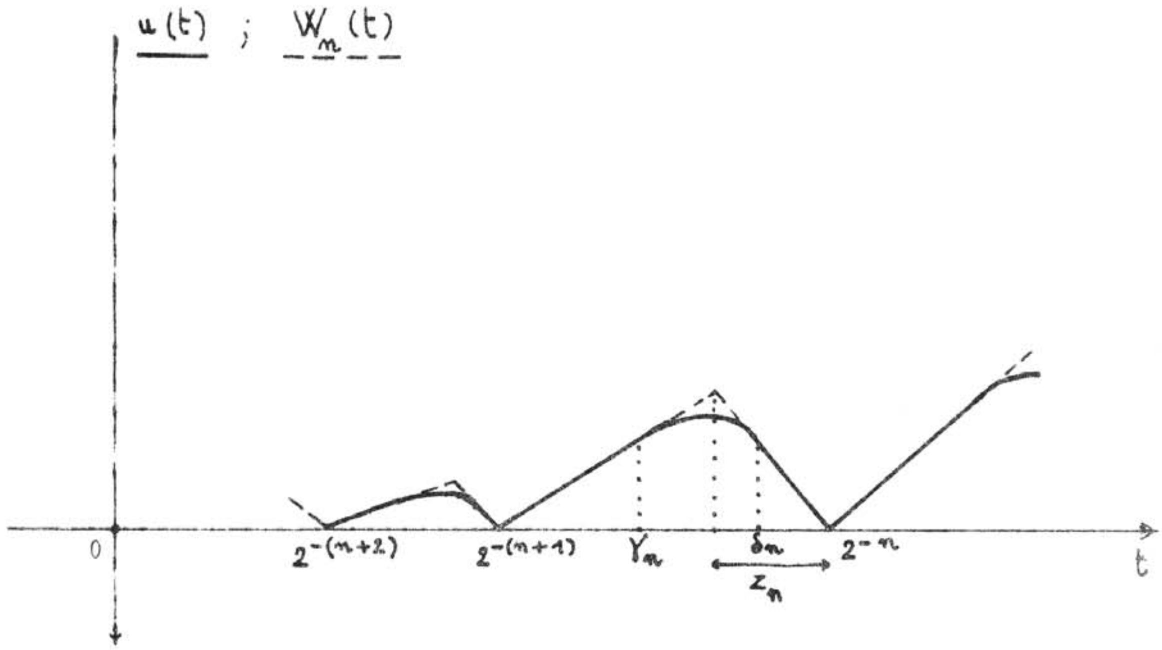
$$\int_R h(t)dt = 1 \qquad \text{e} \qquad \int_R t\, h(t)dt = 0\,,$$

allora, posto $(h * v)(t) = \int_R v(t-y)h(y)dy$, si ha

(a) $h * v$ è convessa se v è convessa,

(b) $h * v = v$ se $v(t) = at + b$.

Consideriamo ora



(2) Il fenomeno di non unicità ci è stato segnalato (oralmente) dal Prof. L. Amerio. Si confronti anche il lavoro di C. Citrini "Controesempi all'unicità del moto di una corda in presenza di una parete", Rend.Acc. Naz. Lincei.

$$W_n(t) = \max\{2^{-(n+1)^2}(2^{-(n+1)}-t);\ 2^{-n^2}(t-2^{-n})\} \quad \text{per} \quad 2^{-(n+1)} \leq t \leq 2^{-n}.$$

Sia $h \in C_0^\infty(R)$, $h \geq 0$, $h(t) = 0$ per $|t| \geq 1$ e

$$\int_{-1}^{1} h(t)dt = 1 \qquad , \qquad \int_{-1}^{1} t\cdot h(t)dt = 0 \quad .$$

Per ogni $n \in N$ poniamo $h_n(t) = 1/\beta_n\, h(t/\beta_n)$, dove, posto

$z_n = 2^{-(n+1)}(1+2^{n+1})^{-1}$ per ogni $n \in N$, è

$$0 < \beta_n = 5^{-1}\, z_n \,.$$

Posto $u(t) = (h_n * W_n)(t)$ per $2^{-(n+1)} \leq t \leq 2^{-n}$, risulta $u(t) \leq 0$.

Inoltre esistono (γ_n) , (δ_n) con $2^{-(n+1)} < \gamma_n < z_n < \delta_n < 2^{-n}$

per cui

$$2^{-(n+1)} \leq t \leq \gamma_n \quad \text{e} \quad y \in \text{supp}\, h_n : W_n(t-y) = a_n(t-y) + b_n \,,$$

$$\delta_n \leq t \leq 2^{-n} \quad \text{e} \quad y \in \text{supp}\, h_n : W_n(t-y) = a_n'(t-y) + b_n' \quad .$$

Ne segue, cfr. (b),

$$u(t) = W_n(t) \quad \text{per} \quad 2^{-(n+1)} \leq t \leq \gamma_n \quad \text{o} \quad \delta_n \leq t \leq 2^{-n} \,.$$

Inoltre per la (a) $\ddot{u}(t) \geq 0$. E' altresì evidente che $u(0) = \dot{u}^+(0) = 0$.

Posto, in $[0,1]$, $f(t) = \ddot{u}(t)$, f risulta traccia di una funzione di classe C^∞. Consideriamo il pdr in $\bar{\Omega} = [0,1]$ col dato f e condizione iniziale ammissibile $(0,0)$ nello zero.

E' evidente che la funzione $u(t)$ precedentemente costruita è soluzione di questo pdr con le condizioni iniziali assegnate.

E' facile altresì provare che la funzione identicamente nulla è anche so luzione dello stesso pdr.

§ 3. Alcune condizioni sufficienti per l'unicità della soluzione del pdr.

Sussiste il seguente

Teorema 2.- *Se f è costante a tratti in $\bar{\Omega}$, allora il pdr ammette una unica soluzione in $\bar{\Omega}$ verificante un assegnato dato iniziale ammissibile (s,b).*

Dimostrazione.-

E' sufficiente provare il teorema per $f(t) = c$ in $\bar{\Omega}$.
Per $c = 0$ l'unicità è ovvia; sia allora $c \neq 0$. Se u è soluzione del pdr verificante le condizioni $u(0) = s$, $\dot{u}^{+}(0) = b$, si ha (dalla (iv))

$$(6) \qquad \frac{1}{2}\left[\dot{u}^{\pm}(t)\right]^2 = \frac{1}{2} b^2 - s\, c + c\, u(t) \qquad \text{per} \quad t \in \bar{\Omega} .$$

Da (6) ricaviamo, per $u(t) = 0$,

$$(7) \qquad \left[\dot{u}^{\pm}(t)\right]^2 = b^2 - 2\, s\, c .$$

La tesi consegue, allora, in virtù di noti teoremi di unicità locale, dalle seguenti osservazioni.

1. Se è $b^2 - 2\, s\, c > 0$, tutti gli eventuali zeri di u sono isolati; inoltre se τ_1 e τ_2 sono due zeri consecutivi $(\tau_2 > \tau_1)$ si ha:

$$(8) \qquad c(\tau_2 - \tau_1) = 2\sqrt{b^2 - 2\, s\, c} \qquad ;$$

da cui

$$(9) \qquad \tau_2 - \tau_1 = \frac{2}{c}\sqrt{b^2 - 2\, s\, c} .$$

Da (8) segue che

(c) per $c < 0$ u ammette al più uno zero,

(d) per $c > 0$ gli zeri consecutivi di u sono equidistanti,

per (9) (e quindi sono in numero finito).

2. Se è $b^2 - 2sc = 0$ si ha

(e) $c > 0$: $u(t) \geq 0$ e quindi $u(t) = 0$ (per (6));

(f) $c < 0$: u ammette al più uno zero.

Per provare che (f) è vera, basta tenere conto che si ha: u ha solo zeri isolati e non può avere più di uno zero isolato; che u non possa avere più di uno zero isolato segue da (8); che abbia solo zeri isolati segue dal fatto che negli zeri τ di u è $\dot{u}(\tau) = 0$ ed $f(\tau) < 0$.

Evidentemente u non ha zeri se $b^2 - 2sc < 0$. ■

La dimostrazione del teorema 2 suggerisce il seguente risultato.

Teorema 3.- *Se* u *è una soluzione del pdr, in* $\bar{\Omega}$, *con dato* $f \in L^1(\bar{\Omega};R)$ *e condizioni iniziali ammissibili* (s,b) *ed ha un numero finito di zeri, allora* u *è l'unica soluzione del pdr in* $\bar{\Omega}$ *con dato* f *e condizioni iniziali ammissibili* (s,b).

Dimostrazione.-

Supponiamo che u_1 sia una soluzione del pdr, in $\bar{\Omega}$, con lo stesso dato f e le stesse condizioni iniziali ammissibili (s,b). E' evidente che u ed u_1 possono non coincidere solo a partire da uno zero τ di u per cui $\dot{u}^-(\tau) = 0$.

Detto τ_1 lo zero di u successivo a τ si ha:

$$\ddot{u}_1(t) \leq f(t) = \ddot{u}(t) \qquad t \in [\tau, \tau_1] \quad .$$

Ne segue $\quad u_1(t) \leq u(t) < 0 \quad$ per $\quad t \in]\tau, \tau_1[\quad$ e

quindi $\quad u_1(t) = u(t)$. ∎

Sussiste inoltre il seguente

<u>Teorema 4.</u>- *Se* u *è soluzione del pdr in* $\bar{\Omega}$ *con* $f \in L^1(\bar{\Omega};R)$ *e verifica la condizione "esiste* $p > 0$ *tale che* $[\dot{u}^{\pm}(\tau)]^2 \geq p$, *per* $u(\tau) = 0$", *allora* u *è l'unica soluzione del pdr.*

Dimostrazione.-

La condizione posta assicura che gli eventuali zeri di u sono isolati e per la compattezza di $[0,T]$ essi sono in numero finito. Inoltre, per $f \in C^\circ(\bar{\Omega};R)$, $f > 0$ (3), considerando due zeri isolati consecutivi τ_1, τ_2, si ha

$$\ddot{u}(\xi)(\tau_2 - \tau_1) = f(\xi)(\tau_2 - \tau_1) = \dot{u}^-(\tau_2) - \dot{u}^+(\tau_1) =$$
$$= |\dot{u}^-(\tau_2)| + |\dot{u}^-(\tau_1)| \geq 2\sqrt{p} > 0.$$

Da ciò

$$\tau_2 - \tau_1 \geq \frac{2\sqrt{p}}{f(\xi)} \geq \frac{2\sqrt{p}}{M} \tag{10}$$

dove $M = \max\limits_{x \in \bar{\Omega}} f(x)$. ∎

---

(3) Osserviamo esplicitamente che se $f \leq 0$, c'è unicità per la soluzione del pdr, essendoci al più uno zero per u.

Concludiamo col

Teorema 5.- *Sia f assolutamente continua in $\bar{\Omega}$ con $L^1(\bar{\Omega})$ $\ni \dot{f} \geq 0$;*

(g) *Se $f(0) > 0$, per ogni condizione iniziale ammissibile $(s,b) \neq (0,0)$, esiste una unica soluzione del pdr in $\bar{\Omega}$.*

(h) *Per ogni condizione iniziale ammissibile (s,b) verificante la disuguaglianza $b^2 - 2\,s\,f(0) > 0$, il pdr ammette una unica soluzione in $\bar{\Omega}$.*

Dimostrazione.-

Dalla conservazione dell'energia segue

$$\frac{1}{2}[\dot{u}^{\pm}(\tau)]^2 \geq \frac{1}{2}b^2 - s\,f(0) \qquad \text{per} \qquad u(\tau) = 0. \tag{11}$$

(g) Dalla (11) segue l'unicità in virtù del teorema 4.

(h) Intanto è $(s,b) \neq (0,0)$. Se $f(0) \geq 0$ si ricade nel caso (g); se $f(0) < 0$, si ha che per $f(t) \leq 0$ u ha al più uno zero e per $f(t)>0$ valgono le considerazioni di (g). ■

Accettato per la pubblicazione nella rivista "Rendiconti di Matematica" Fasc.IV Vol.13 Serie VI (1980), Roma.