li doppi; in corrispondenza di ciascuno di essi il radicale deve cambiare segno. Il radicale che figura nella definizione delle B si mantiene sempre positivo.

In questo modo si coprono tutti i possibili casi sull'asse reale (si ritrovano gli stessi risultati solo quando $\frac{x}{2}$ è variato di 3m, cioè x è variato di 6m).

E' chiaro che le sei funzioni definite dalle (49) sono strettamente correlate tra loro; tuttavia non sembra possibile esprimere esplicitamente in modo semplice le relazioni intercorrenti tra esse. Invece dalle (48) si possono trovare facilmente delle relazioni lineari tra FTG di argomento metà, i cui coefficienti sono FTG di argomento intero. Tali relazioni legano tra loro particolari coppie di FTG di argomento metà, e sono sintetizzabili nelle tre formule seguenti:

$$\frac{a}{S} + \frac{s}{A} = \frac{A}{s} - T\,t = \frac{S}{a} - \frac{1}{Tt} = 1 \qquad (50)$$

Le relazioni (50) non sono indipendenti: con facili passaggi si può infatti trasformarle l'una nell'altra.

§ III.2.- Formule di trisezione.

Il problema della trisezione dell'argomento delle FTG di ordine 3 può essere trattato in modo abbastanza diretto. Benché il metodo seguito valga per qualunque scelta di tale argomento, tuttavia conviene discutere in dettaglio soltanto il caso di argomento reale.

Combinando le formule di duplicazione (I-52) e quelle di addizione (I-50) e (I-51) si possono facilmente ottenere le formule di triplicazione (l'argomento delle funzioni a secondo membro è x):

$$
\begin{aligned}
A(3x) &= - \frac{3AT(1-A^3T^3)}{T^9+3T^6-6T^3+1} \\
T(3x) &= \frac{T^9-6T^6+3T^3+1}{T^9+3T^6-6T^3+1} \\
S(3x) &= - \frac{3AT(1-A^3T^3)}{T^9-6T^6+3T^3+1}
\end{aligned}
\tag{51}
$$

Di queste equazioni, la più conveniente per essere invertita è la seconda: da essa si deduce che la quantità $T^3(\frac{x}{3}) = z$ soddisfa la seguente equazione di terzo grado, contenente $T \equiv T(x)$ come parametro:

$$z^3(1-T) - 3z^2(2+T)+3z(1+2T)+(1-T) = 0 \tag{52}$$

Per T reale, la (52) ha tre soluzioni reali. E' facile vedere che, per la periodicità 3m di T, esse corrispondono, oltre che a $T^3(\frac{x}{3})$, anche a $T^3(\frac{x}{3} + m) = - S^3(\frac{x}{3})$, e a $T^3(\frac{x}{3} - m) = \frac{1}{A^3}(\frac{x}{3})$. La risoluzione completa della (52) quindi permette di trattare simultaneamente la trisezione di tre delle sei funzioni base già considerate (le altre tre si otterranno in maniera immediata alla fine di questo paragrafo).

La soluzione della (52) può essere interpretata più facilmente esprimendo T in termini delle funzioni di Weierstrass di tipo equianarmonico con $g_3 = 1$, attraverso le formule (I-46) che qui riportiamo:

$$\frac{A(x)}{1-T(x)} = \wp\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\middle|0,1\right); \quad \frac{1+T(x)}{1-T(x)} = - \frac{1}{\sqrt{3}}\wp'\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\middle|0,1\right) \tag{53}$$

in modo da ottenere, dalla seconda delle (53), la (52) sotto la forma:

$$z^3 - \frac{3}{2}(1-\sqrt{3}\,\wp')\,z^2 - \frac{3}{2}(1+\sqrt{3}\,\wp')z + 1 = 0 \tag{54}$$

(ove, come fatto d'abitudine anche in I, l'argomento e i parametri delle funzioni di Weierstrass si sono omessi).

La soluzione della (54) con i metodi standard fornisce le seguenti espressioni per le tre soluzioni u_1, u_2, u_3:

$$\begin{aligned}
u_1 &= \frac{1}{2}(1-\sqrt{3}\,\wp') + 2\sqrt{3}\,\wp^{3/2} \cos \frac{\phi}{3} \\
u_2 &= \frac{1}{2}(1-\sqrt{3}\,\wp') + 2\sqrt{3}\,\wp^{3/2} \cos \left(\frac{\phi}{3} + \frac{2\pi}{3}\right) \\
u_3 &= \frac{1}{2}(1-\sqrt{3}\,\wp') + 2\sqrt{3}\,\wp^{3/2} \cos \left(\frac{\phi}{3} - \frac{2\pi}{3}\right)
\end{aligned} \tag{55}$$

ove
$$\mathrm{tg}\phi = - \frac{1}{\wp'}$$

Consideriamo ora i valori di x reali, positivi e prossimi a zero, e conveniamo di prendere $\phi = 0$ quando $x = 0$, e il segno positivo per il radicale $\wp^{3/2}$. In questo caso è facile vedere che la soluzione u_1 corrisponde a $1/A^3(\frac{x}{3})$, u_2 a $-S^3(\frac{x}{3})$, u_3 a $T^3(\frac{x}{3})$. Facendo crescere x fino a 3m e oltre, benché le funzioni di Weiestrass, per $x > 3m$, riprendano gli stessi valori di prima, ϕ invece che valori intorno a zero ora assume valori intorno a π, così che u_1, u_2, u_3 non riproducono i valori precedenti. Tuttavia, affinché le tre soluzioni (55) corrispondano sempre alle stesse FTG, è necessario che $\wp^{3/2}$ cambi segno ogni volta che x passa attraverso un multiplo di 3m. In questo modo le FTG di argomento trisecato sono definite lungo un intero periodo, e riassumono i loro valori iniziali solo quando x varia di tre periodi, cioé di 9m.

Riesprimendo ora $\wp$ e $\wp'$ in termini di FTG tramite le (53), si ottengono così le prime tre equazioni (56). Le altre tre si ricavano immediatamente prendendo il complemento a 1 delle soluzioni (55)[24].

---

24) Ciò equivale a scrivere le (55) stesse cambiando segno a $\wp'$ e alla determinazione del radicale $\wp^{3/2}$.

In questo modo si arriva al seguente quadro completo delle formule di trasformazione (come già detto, il segno indicato davanti al radicale è quello valido per $0 \leq x < 3$ m, e si prende $\phi = 0$ per $x=0$):

$$\begin{aligned}
\frac{1}{A^3}\left(\frac{x}{3}\right) &= \frac{2+T}{1-T} + 2\sqrt{3}\left[\frac{A}{1-T}\right]^{3/2}\cos\frac{\phi}{3} \\
S^3\left(\frac{x}{3}\right) &= -\frac{2+T}{1-T} - 2\sqrt{3}\left[\frac{A}{1-T}\right]^{3/2}\cos\left(\frac{\phi}{3}+\frac{2\pi}{3}\right) \\
T^3\left(\frac{x}{3}\right) &= \frac{2+T}{1-T} + 2\sqrt{3}\left[\frac{A}{1-T}\right]^{3/2}\cos\left(\frac{\phi}{3}-\frac{2\pi}{3}\right) \\
\frac{1}{S^3}\left(\frac{x}{3}\right) &= \frac{1+2T}{1-T} + 2\sqrt{3}\left[\frac{A}{1-T}\right]^{3/2}\cos\frac{\phi}{3} \qquad (56) \\
\frac{1}{T^3}\left(\frac{x}{3}\right) &= -\frac{1+2T}{1-T} - 2\sqrt{3}\left[\frac{A}{1-T}\right]^{3/2}\cos\left(\frac{\phi}{3}+\frac{2\pi}{3}\right) \\
A^3\left(\frac{x}{3}\right) &= -\frac{1+2T}{1-T} - 2\sqrt{3}\left[\frac{A}{1-T}\right]^{3/2}\cos\left(\frac{\phi}{3}-\frac{2\pi}{3}\right)
\end{aligned}$$

con

$$tg\phi = \sqrt{3}\,\frac{1-T}{1+T}$$

L'ulteriore estrazione di radice cubica per ottenere a primo membro le FTG di argomento $x/3$ non crea alcun problema di determinazione, perché sia i poli che gli zeri di tutte le (56) sono tripli (essi si hanno solo nei punti ove A e T divergono, come è più facilmente ricavabile dalle formule di tipo (55)). Per valori reali di x, va dunque sempre presa la radice aritmetica.

^^

L'Autore di questo studio ringrazia vivamente il Prof. G. ANDREASSI per l'interesse mostrato in questo lavoro.