SEZIONE III

FORMULE DI BISEZIONE E TRISEZIONE PER LE FTG DI ORDINE 3.

§ III. 1.- Le formule di bisezione.

Il problema delle formule di bisezione per le FTG di ordine 3 in I è stato soltanto accennato, e rinviato ad ulteriore trattamento in altra sede: è ciò non per ragioni concettuali (si tratta semplicemente di invertire le formule di duplicazione) ma pratiche. Di fatto, essendo il processo di inversione abbastanza complicato, e portando esso a formule dall'aspetto non semplice, la sua trattazione trova la sua collocazione nel presente lavoro.

Cominciamo col riportare le formule di duplicazione (I-52):

$$A(2x) = \frac{A(1+T^3)}{T(1+A^3)} \; ; \; T(2x) = \frac{T^3 - A^3}{T(1+A^3)} \; ; \; S(2x) = \frac{A(1+T^3)}{T^3 - A^3} \tag{42}$$

ove l'argomento delle funzioni a secondo membro è x, e introduciamo una nuova notazione, indicando i simboli delle FTG di argomento metà con una lettera minuscola ($a = A(\frac{x}{2})$ e simili), mentre la notazione A continuerà ad indicare A(x) (e simili). In questo modo, dalla seconda delle (42) calcolata in $\frac{x}{2}$ si ottiene

$$T = \frac{2t^3-1}{t(2-t^3)}$$

da cui si ricava la seguente equazione di quarto grado per t:

$$t^4 + \frac{2}{T}t^3 - 2t - \frac{1}{T} = 0 \tag{43}$$

E' facile vedere che, utilizzando le altre relazioni (42), oppure servendosi delle formule collegative che trasformano una delle sei funzioni $a, t, -s, \frac{1}{a}, \frac{1}{t}, -\frac{1}{s}$ in un'altra (cf. tabella I di I), un'equazione esattamente del tipo della (43) può essere scritta per una qualsiasi delle funzioni suddette.

E' possibile quindi trattare il problema della bisezione in maniera del tutto generale, cercando le soluzioni dell'equazione

$$z^4 + 2Vz^3 - 2z - V = 0 \tag{44}$$

ove z rappresenta una delle sei FTG di argomento metà, e V una opportuna funzione di argomento intero, secondo la corrispondenza indicata nella tabella V.

TABELLA V

z	V	D
a	$-S$	$\frac{1}{T}$
t	$\frac{1}{T}$	$-S$
$-s$	A	T
$\frac{1}{a}$	$-\frac{1}{S}$	$\frac{1}{A}$
$\frac{1}{t}$	T	A
$-\frac{1}{s}$	$\frac{1}{A}$	$-\frac{1}{S}$

L'equazione (44) si risolve con le tecniche standard e fornisce

$$z = \frac{1}{2}\left(\sqrt{U_1} + \sqrt{U_2} + \sqrt{U_3} - V\right) \tag{45}$$

ove

$$U_1 = V^2 + 2^{2/3}D$$

$$U_2 = V^2+2^{2/3}D\ e^{2i\pi/3}$$

$$U_3 = V^2+2^{2/3}\ D\ e^{-2i\pi/3}$$

e i segni dei radicali vanno scelti in modo da avere

$$\sqrt{U_1}\ \sqrt{U_2}\ \sqrt{U_3} = 2 - V^3 = 1 + D^3 \tag{46}$$

Nelle formule precedenti D indica quella particolare FTG legata a V dalla relazione $V^3+D^3 = 1$, e che è riportata, per ciascuno dei casi in esame, nell'ultima colonna della tabella V.

Conviene ora sviluppare la (45) nel caso in cui l'argomento x sia reale: questo impone che anche z sia reale e implica una certa restrizione nella scelta dei segni dei radicali, nel senso che quelli di $\sqrt{U_2}$ e $\sqrt{U_3}$ devono essere necessariamente concordi (e quello di $\sqrt{U_1}$ resta determinato dalla (46)). In questo modo le soluzioni della (44) si riducono da quattro a due, in accordo con il fatto che, sull'asse reale, dati i valori delle FTG nel punto x, si hanno due punti indipendenti a cui si possono applicare le formule di bisezione (precisamente, $\frac{x}{2}$ e $\frac{x}{2}+\frac{3m}{2}$).

La soluzione (45) in questo caso si riduce a

$$z= \frac{1}{2}(\epsilon\sqrt{V^2+2^{2/3}\ D} \pm \sqrt{2\sqrt{V^4-2^{2/3}V^2D+2^{4/3}D^2}+2V^2-2^{2/3}D} - V) \tag{41}$$

ove ϵ (uguale a +1 o -1) rappresenta il segno del secondo membro della (46), il doppio segno caratterizza le due soluzioni possibili, e il radicale che figura sotto radice nella (47) (e che, per x reale, non si annulla mai) va sempre preso col segno positivo.

Conviene ora specificare l'espressione della (47) nei casi particolari delle varie FTG, cercando di rendere quanto più è possibile le varie formule omogenee tra loro. Con un po' d'algebra, si arriva al seguente risultato:

$$a = \frac{1}{2T}\left(\sqrt{D_1} - \sqrt{B_1} + A\right)$$

$$t = \frac{1}{2T}\left(\sqrt{D_o} + \sqrt{B_o} - 1\right)$$

$$s = \frac{1}{2}\left(-\sqrt{D_1} + \sqrt{B_1} + A\right) \tag{48}$$

$$\frac{1}{s} = \frac{1}{2A}\left(\sqrt{D_o} + \sqrt{B_o} + 1\right)$$

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{2A}\left(\sqrt{D_2} + \sqrt{B_2} + T\right)$$

$$\frac{1}{t} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{D_2} + \sqrt{B_2} - T\right)$$

con

$$D_o = 1-2^{2/3}AT \quad ; \; D_1 = A^2+2^{2/3}T; \qquad D_2 = T^2+2^{2/3}A$$

$$B_o = 2\sqrt{1+2^{2/3}AT+2^{4/3}A^2T^2}+2+2^{2/3}AT \tag{49}$$

$$B_1 = 2\sqrt{A^4-2^{2/3}A^2T+2^{4/3}T^2}+2A^2-2^{2/3}T$$

$$B_2 = 2\sqrt{T^4-2^{2/3}T^2A+2^{4/3}T^2}+2T^2-2^{2/3}A$$

I segni dei radicali sono scelti in modo da assicurare il comportamento corretto delle funzioni intorno a $x = 0$. Variando x (sia nel verso positivo che in quello negativo) le funzioni D_o, D_1, D_2 presentano degli zeri doppi e dei poli doppi. In corrispondenza di ciascuno di essi, il radicale deve cambiare segno. Invece le tre funzioni B presentano solo poli doppi; in corrispondenza di ciascuno di essi il radicale deve cambiare segno. Il radicale che figura nella definizione delle B si mantiene sempre positivo.

In questo modo si coprono tutti i possibili casi sull'asse reale (si ritrovano gli stessi risultati solo quando $\frac{x}{2}$ è variato di 3m, cioè x è variato di 6m).

E' chiaro che le sei funzioni definite dalle (49) sono strettamente correlate tra loro; tuttavia non sembra possibile esprimere esplicitamente in modo semplice le relazioni intercorrenti tra esse. Invece dalle (48) si possono trovare facilmente delle relazioni lineari tra FTG di argomento metà, i cui coefficienti sono FTG di argomento intero. Tali relazioni legano tra loro particolari coppie di FTG di argomento metà, e sono sintetizzabili nelle tre formule seguenti:

$$\frac{a}{S} + \frac{s}{A} = \frac{A}{s} - T\,t = \frac{S}{a} - \frac{1}{Tt} = 1 \qquad (50)$$

Le relazioni (50) non sono indipendenti: con facili passaggi si può infatti trasformarle l'una nell'altra.

§ III.2.- Formule di trisezione.

Il problema della trisezione dell'argomento delle FTG di ordine 3 può essere trattato in modo abbastanza diretto. Benché il metodo seguito valga per qualunque scelta di tale argomento, tuttavia conviene discutere in dettaglio soltanto il caso di argomento reale.

Combinando le formule di duplicazione (I-52) e quelle di addizione (I-50) e (I-51) si possono facilmente ottenere le formule di triplicazione (l'argomento delle funzioni a secondo membro è x):