§ II.2.- Gli integrali definiti tra 0 e m e la generalizzazione della formula di Wallis.

Se entrambi gli esponenti di un monomio in A e T risultano maggiori di -1, il monomio suddetto è integrabile tra 0 e m. Il valore dell'integrale può essere espresso dalla seguente formula compatta, valida per qualunque p,q, purché > 0:

$$\int_0^m A^{p-1}\, T^{q-1}\, dx = \frac{1}{n}\, B\left(\frac{p}{n}, \frac{q}{n}\right) \tag{22}$$

ove B è la funzione beta di Eulero.

La dimostrazione della (22) è immediatamente ottenibile a partire da una delle definizioni della funzione beta:

$$B(x,y) = \int_0^1 u^{x-1}\, (1-u)^{y-1}\, du$$

Ponendo $x = p/n$, $y = q/n$ e sostituendo $u = A^n(x)$ si arriva immediatamente alla (22).

La (22) contiene (per $p = q = 1$) la definizione (I-5) di m, e tutte le ben note formule sugli integrali tra 0 e $\pi/2$ dei prodotti di potenze di seni e coseni.

E' possibile anche ottenere una generalizzazione della formula di Wallis, che fornisce una successione lentamente convergente a π.
Partendo dall'ovvia constatazione che, per $0 < x < m$, si ha $A^{p_1} < A^{p_2}$ per $p_1 > p_2$, e indicando con k un intero positivo qualsiasi, si arriva alle seguenti disuguaglianze:

$$\int_0^m A^{(k+1)n-1}\, dx < \int_0^m A^{kn}\, dx < \int_0^m A^{kn-1}\, dx$$

e, applicando la (22):

$$\frac{1}{n} B\left(k+1, \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}\, B\left(k+\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}\, B\left(k, \frac{1}{n}\right) \tag{23}$$

Introduciamo ora il simbolo di "fattoriale n-uplo" $r^{(n)}!$ di un intero positivo r, definito da:

$$r^{(n)}! = r(r-n)\ (r-2n)\ \ldots R_{rn}$$

ove R_{rn} è il resto della divisione di r per n (se n divide r, si prende $R_{rn} = n$). Si assume anche la convenzione $0^{(n)}! = 1$. Un semplice calcolo mostra che, per s intero > 0, si ha:

$$\frac{1}{n} B(s, \frac{1}{n}) = \frac{[(s-1)n]^{(n)}!}{[(s-1)n+1]^{(n)}!}$$

$$\frac{1}{n} B(s + \frac{1}{n}, \frac{1}{n}) = m \frac{[(s-1)n+1]^{(n)}!}{[(s-1)n+2]^{(n)}!}$$

ricordando la definizione (I-5) di m.

Inserendo le suddette espressioni nella (23), e manipolando, ove opportuno, i fattoriali n-upli in base alla loro definizione, si arriva al seguente risultato:

$$\frac{kn}{kn+1} \frac{[(k-1)n]^{(n)}!}{[(k-1)n+1]^{(n)}!} < m \frac{[(k-1)n+1]^{(n)}!}{[(k-1)n+2]^{(n)}!} < \frac{[(k-1)n]^{(n)}!}{[(k-1)n+1]^{(n)}!}$$

Prendendo il limite $k \to \infty$, si giunge facilmente alla relazione

$$m = \lim_{k\to\infty} \frac{[(k-1)n+2]^{(n)}!\ [(k-1)n]^{(n)}!}{([(k-1)n+1]^{(n)}!)^2} \tag{24}$$

La (24) per $n=2$ riproduce esattamente la nota formula di Wallis.

Tuttavia l'espressione generale assume una forma preferibile, perché più compatta, sostituendo nella (24) k a (k-1), con il che si ottiene:

$$m = \lim_{k\to\infty} \frac{(kn+2)^{(n)}!\ (kn)^{(n)}!}{\left[(kn+1)^{(n)}!\right]^2} \qquad (25)$$

Specificando la (25) per $n = 3$, e tenendo presente che $(3k)!!! \cdot (3k+1)!!!\ (3k+2)!!! = (3k+2)!$ (ove il simbolo !!! sta per $\overset{(3)}{!}$) si ottiene:

$$m_3 = \lim_{k\to\infty} \frac{(3k + 2)!}{\left[(3k+1)!!!\right]^3} \qquad (26)$$

Come già fatto notare per la formula di Wallis, la convergenza verso il limite delle successioni (25) e (26) è molto lenta.

§ II.3.- L'integrazione delle FTG di ordine 3 e 4.

Nelle tabelle II e III è riportata una scelta di integrali indefiniti [16] concernenti le FTG di ordine rispettivamente 3 e 4. In particolare

---

16) Come già accennato in precedenza [15], per ragioni di semplicità non è indicata la costante di integrazione implicitamente contenuta in ogni integrale indefinito. Ne segue che, quando per un certo integrale sono riportate due o più funzioni, esse differiscono tra loro per una costante.