S E Z I O N E I

ALCUNE PROPRIETA' GENERALI DELLE FTG

§ I.1.- Le FTG nell'ottica della geometria algebrica, e il problema della parametrizzazione.

Cominciamo con l'osservazione che, la definizione delle FTG essendo strettamente legata all'espressione di certe curve algebriche in un piano cartesiano $\xi\eta$ ($\xi^n + \eta^n = 1$ per le FTG ordinarie di ordine n, e $\xi^4+\eta^4+2\lambda\xi^2\eta^2=1$ per le FTG estese di ordine 4, direttamente connesse alle funzioni ellittiche), le loro proprietà possono essere ricavate attraverso procedimenti conosciuti di geometria algebrica [5]. In particolare, il problema della determinazione delle FTG può essere considerato come un caso particolare del problema generale di trovare quello che è chiamato un "parametro uniformizzante" delle suddette curve algebriche. Si dice parametro uniformizzante un parametro t, tale che le coordinate della curva studiata possano essere ottenute attraverso combinazioni razionali di opportune funzioni meromorfe di t. E' chiaro che l'introduzione delle funzioni circolari sint,cost permette di uniformizzare tutte le curve algebriche di secondo grado, mentre l'introduzione delle funzioni ellittiche (nella forma di Weierstrass) permette di uniformizzare in maniera immediata tutte le curve del tipo

$$\eta^2 = 4\xi^3 - g_2\xi - g_3$$

e, in maniera indiretta, tutte le curve del tipo $\eta^2 = P(\xi)$, ove $P(\xi)$ è un polinomio in ξ di terzo o quarto grado. E' quindi ragionevole pensare che un opportuno procedimento di tale tipo permetta di risalire alle

---

5) Si veda, per una presentazione di tali metodi, il Cap. XII del testo di E. HILLE, Analytic Function Theory, Chelsea Publishing Company, New York 1962 (vol.II); tale testo contiene anche una trattazione delle funzioni ellittiche, e numerose referenze sui vari argomenti.

FTG $A(x),T(x)$ [o meglio, alle loro combinazioni che risultano essere meromorfe] come funzioni del parametro uniformizzante x definito in I. Tuttavia, da un esame generale del caso specifico, sembra che tale procedimento non sia né immediato né semplice [6], ed è lecito nutrire il dubbio che la sua individuazione sia possibile solo se si conoscono già i risultati finali (ottenuti con il metodo elementare sviluppato in I), da cui si possa procedere, per così dire, a ritroso. La caratteristica principale del problema in esame, che generalmente non si riscontra nelle procedure correnti di uniformizzazione, è che il parametro uniformizzante x non è, per così dire, trovato a posteriori, ma viene fissato a priori, in base alla richiesta che esso abbia un preciso e diretto significato geometrico (doppia area del settore) rispetto alla curva considerata. Questo significato geometrico, direttamente rapportato alla curva analizzata, non è presente, come già detto, nelle uniformizzazioni di tipo standard; e che l'uniformizzazione che porta alle FTG non sia, in generale, di tipo standard lo si può vedere, p. es. dalla considerazione esplicita delle FTG estese di ordine 4, ove la curva $\xi^4+\eta^4+2\lambda\xi^2\eta^2 = 1$ è di secondo grado in ξ^2 e η^2 [7], e quindi si uniformizza in modo standard non in termini di funzioni ellittiche, ma di seni e coseni [8].

In base alle considerazioni precedenti, ci si può domandare se la scelta a priori della doppia area del settore x come parametro uniformizzante, indipendentemente dall'interesse dei risultati ottenuti, sia veramente

---

6) E' questo il motivo, unito anche alla scarsa familiarità con la materia dell'Autore della presente nota, per cui la ricerca di tale procedimento non è stata portata avanti in questo lavoro.

7) In tale caso si devono uniformizzare ξ^2 e η^2 anziché ξ e η, perché si sa che A^2 e T^2 (e non A,T) sono funzioni meromorfe di x.

8) La possibilità di rappresentare le FTG estese in termini di seni e coseni apparirà in modo immediato dalla trattazione che verrà fatta più avanti [§ II.4, eq.(25)]

una sorta di scelta obbligata, o se invece non sia possibile definire opportunamente le FTG in termini di un altro parametro, avente anch'esso un significato geometrico diretto, in modo da ottenere nuovamente dei risultati interessanti (sia pure diversi da quelli trovati in I). Di parametri crescenti monotonicamente e aventi un significato geometrico immediato comparabile a quello dell'area del settore se ne hanno sostanzialmente altri due: cioé l'angolo ϕ tra il raggio vettore corrente e il semiasse positivo delle ξ (cf. Fig. I-1)[9], e l'arco di lunghezza ℓ misurato(in senso antiorario per valori crescenti di ℓ) a partire dal punto $\xi = 1, \eta = 0$ di intersezione della curva parametrica con il semiasse positivo delle ξ. Tuttavia,è facilmente constatabile che (con la banale eccezione delle FTG di ordine 2, $\sin\phi$ e $\cos\phi$, per cui $\phi \equiv x$) l'angolo ϕ non si presta ad una soddisfacente definizione delle FTG, in quanto, per qualsiasi curva parametrica, si ha $S(\phi) = \operatorname{tg}\phi$, e quindi ci si riconduce in ogni caso a combinazioni (più o meno praticabili) di funzioni trigonometriche. Invece la scelta dell'arco ℓ come parametro uniformizzante può portare a risultati non banali, e merita quindi una certa attenzione.

E' chiaro che il comportamento delle FTG definite in termini di ℓ si ottiene a partire da quello (già noto) delle FTG definite in termini di x semplicemente considerando il legame funzionale tra x e ℓ, immediatamente ottenibile dalle relazioni:

$$d\ell = \sqrt{(d\xi)^2 + (d\eta)^2} = \sqrt{(dA)^2 + (dT)^2} = \sqrt{\left(\frac{dA}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dT}{dx}\right)^2}\,dx \qquad (7)$$

---

9) Da ora in poi, la notazione Fig. I-1 indicherà la Fig. 1 di I (e simili). Analogamente la notazione (I-1) indicherà la formula (1) di I (e simili).

Per le FTG di ordine n, la (7), ricordando le (2), si specifica in

$$d\ell = \sqrt{T^{2n-2}(x) + A^{2n-2}(x)} \quad dx \tag{8}$$

(da implementare con l'ovvia condizione al contorno che si abbia $\ell = 0$ per $x = 0$).

La (8), se si fa eccezione per i casi banali $n = 1$ ($\ell = \sqrt{2}\,x$) e $n = 2$ ($\ell = x$) dimostrabili del resto anche geometricamente, introduce nelle FTG ridefinite $\hat{A}(\ell) = A[x(\ell)]$, $\hat{T}(\ell) = T[x(\ell)]$ una struttura di singolarità completamente nuova, e, come vedremo, più complicata di quella delle funzioni descritte in I.

Una caratteristica saliente di tutte le FTG considerate come funzioni di ℓ è che esse non divergono mai per valori finiti di ℓ, ma divergono solo quando ℓ tende all'infinito. Infatti il valore ℓ_0 di ℓ corrispondente a un valore x_0 di x si ottiene (tenendo conto delle condizioni al contorno), integrando dall'origine fino a x_0 il secondo membro della (8) (secondo un cammino scelto in modo opportuno qualora la funzione integranda presenti dei punti di diramazione).

Ora, qualunque sia il punto x_0 ove $A(x_0)$ e $T(x_0)$ divergono, e qualunque sia il cammino scelto, si trova che l'integrale suddetto risulta sempre divergente [10]: e ciò conferma che le singolarità di $A(x)$ e $T(x)$ non dànno luogo a singolarità al finito per $\hat{A}(\ell)$, $\hat{T}(\ell)$. Invece queste funzioni hanno singolarità non divergenti in tutti i punti ℓ_0 associati ai valori x_0 per cui $T^{2n-2}(x_0) + A^{2n-2}(x_0) = 0$. Per tali valori di x_0, come è immediato controllare, $S(x_0)$ vale una radice (2n-2)-esima di -1; indicando con η una qualsiasi di tali radici, poiché gli zeri di $S(x) - \eta$ sono sempre semplici, ne segue che per tutte le FTG considerate come funzioni di ℓ il comportamento di $\hat{A}(\ell)$ e $\hat{T}(\ell)$ nelle vicinanze delle loro singolarità ℓ_0 è sempre lo stesso, e precisamente risulta del tipo:

---

10) Si tenga presente il comportamento di A e T vicino ad una singolarità al finito, che va come $(x-x_0)^{-\frac{1}{n-2}}$, ove x_0 è la locazione della singolarità (cf. § II.2 di I).

$$\hat{F}(\ell) = \hat{F}(\ell_0) + c(\ell - \ell_0)^{2/3} + \ldots\ldots \tag{9}$$

ove F rappresenta una delle funzioni A,T,S e c è un'opportuna costante, il cui valore è diverso nei diversi casi. (Si noti che $\hat{S}$ ha anche dei poli semplici al finito nei punti ove $\hat{T} = 0$, e che nella (9) $\hat{F}(\ell_0)$ è sempre $\neq 0$, come conseguenza della relazione $\hat{S}(\ell_0) = n$ e delle formule che esprimono A e T in funzione di S).

Per quanto riguarda l'andamento delle suddette funzioni nel piano complesso, la loro eventuale periodicità, etc., l'indagine si presenta difficile, a causa dei numerosi punti di diramazione di tipo (9), che (come già visto in I nello studio delle FTG di ordine 5 e 6) complicano notevolmente la struttura della superficie di Riemann delle funzioni. La sola cosa che può essere facilmente determinata è il comportamento delle funzioni suddette per valori reali di ℓ, per cui si ha una ancor più marcata differenziazione tra le FTG di ordine pari e quelle di ordine dispari. Infatti, mentre le prime sono periodiche lungo l'asse reale e godono di tutte le proprietà di simmetria già riscontrate nella variabile x, le altre sono non periodiche, non simmetriche, e crescenti monotonicamente da $-\infty$ (per $\ell \to -\infty$) a $+\infty$ (per $\ell \to +\infty$). Questo comportamento è un'ovvia conseguenza della presenza di singolarità in x sull'asse reale, e si estende quindi anche all'andamento in ℓ di tutte le funzioni iperboliche generalizzate (FIG) descritte in I.

Le stesse conclusioni si raggiungono considerando anche l'andamento in funzione di ℓ delle FTG estese di ordine 4, ampiamente discusse nella parte III di I. Per esse è sufficiente riportare la formula analoga alla (8), che è la seguente:

$$d\ell = \sqrt{[(T^2(x)+A^2(x)]\ [1-(1-\lambda^2)A^2(x)T^2(x)]}\ dx \qquad (10)$$

E' da notare che l'integrazione dei secondi membri di (9) e (10) non è riconducibile a funzioni conosciute (compresi gli integrali ellittici), con l'eccezione della (10) nei casi $\lambda = 1$ (che risulta banale) e $\lambda = -1$ (che esprime la dipendenza delle funzioni iperboliche ordinarie della lunghezza dell'arco di iperbole, ed è riconducibile ad un integrale ellittico di seconda specie). Questo fatto rende particolarmente complicato lo studio delle funzioni in questione: ma, anche prescindendo da tale difficoltà, la trattazione precedente mostra in maniera convincente che la scelta a priori di un parametro uniformizzante diverso dalla doppia area del settore proposta in I non porta a risultati interessanti, e, in particolare, non consente una presentazione alternativa delle funzioni ellittiche (quale è stata ottenuta in I) che esibisca semplicità di comportamento e notevoli proprietà di simmetria. Queste considerazioni sembrano rafforzare la convinzione che il ruolo particolare svolto dal parametro uniformizzante x usato nella presente trattazione non possa essere ricondotto ad un'ovvia conseguenza di procedimenti standard di geometria algebrica.

§ I.2.- Sullo sviluppo in serie di Taylor delle FTG.

In questo paragrafo verrà ripreso il problema dello sviluppo in serie di Taylor delle FTG, per fornire la dimostrazione dell'osservazione fatta in I, secondo cui i coefficienti degli sviluppi in serie di A_n e T_n (I-11) sono tutti non nulli e di segno alterno [11]. Verranno anche scritti

---

11)Ricordiamo che gi sviluppi in serie considerati procedono per potenze di x^n, a partire da x per A e da 1 per T.