IL PRIMO GRUPPO DI OMOTOPIA REGOLARE DEI GRAFI FINITI ORIENTATI[1]

SUMMARY.- *The first regular homotopy group of a finite connected directed graph G is isomorphic to a quotient group of suitable sequences of vertices in G. We show how to construct such a group and determine it for tournaments with few vertices.*

PREMESSA.-Analogamente a quanto è stato fatto in [1] per i grafi non orientati, ricaviamo qui alcune proprietà del primo gruppo di omotopia regolare dei grafi orientati, $Q_1(G)$; salvo esplicito avviso consideriamo quindi sempre grafi orientati.

Proviamo in un primo momento che ogni 1-cammino regolare può identificarsi con una classe di opportune successioni di vertici in G.

Successivamente vediamo che il gruppo (G,v) delle classi di successioni considerate, isomorfo a $Q_1(G,v)$, può essere ricostruito con un metodo abbastanza semplice; con tale metodo calcoliamo il primo gruppo di omotopia regolare di alcuni "tournaments" e proviamo alcune proprietà di $Q_1(G,v)$.

1. Indicheremo con G un grafo finito orientato e connesso (nel senso che il corrispondente grafo non orientato $\hat{G}$ è connesso) privo di lacci, cioé $G = \mathcal{V}(G) \cup \mathcal{L}(G)$ con $\mathcal{V}(G)$ insieme dei vertici ed $\mathcal{L}(G) \subseteq \mathcal{V}(G) \times \mathcal{V}(G)$ insieme dei lati orientati.

Scriveremo $u \to v$ o $v \leftarrow u$ per indicare che $(u,v) \in \mathcal{L}(G)$ se $u,v \in \mathcal{V}(G)$; scriveremo anche $u \to v$ o $v \to u$ se $u=v$ e $u \not\to v$ se $(u,v) \notin \mathcal{L}(G)$.

Un circuito di G lo diremo irriducibile se non esistono due vertici non consecutivi del circuito congiunti da un lato. Chiameremo ciclo ogni circuito triangolare non transitivo cioé tale che se u,v,w sono i vertici del circuito si abbia $u \not\to w$, $w \not\to v$ e $v \not\to u$ oppure $u \not\to v$, $v \not\to w$ e $w \not\to u$.

<u>DEFINIZIONE</u> 1.- <u>Si dice ammissibile ogni successione</u> $s = v_0 v_1 \dots v_{2n}$

---

[1] Lavoro eseguito nell'ambito del GNSAGA del CNR.

Classificazione per soggetto AMS (MOS) 1975 55E05

<u>formata da un numero dispari di termini coincidenti con vertici di</u> G <u>tale che se</u> $0 \leq i \leq 2n-1$ <u>si abbia</u> $v_i \to v_{i+1}$ <u>o</u> $v_i \leftarrow v_{i+1}$ <u>a seconda che</u> v_i <u>abbia posto dispari o pari</u>.

Osserviamo che se G è connesso e $v_i, v_j \in \mathcal{V}(G)$ esiste una successione ammissibile da v_i a v_j.

In seguito, salvo esplicito avviso, prenderemo in considerazione solo successioni ammissibili e indicheremo di solito con una lettera accentata i vertici che nella successione hanno posto dispari.

<u>DEFINIZIONE</u> 2.- <u>Una successione si dice ridotta se in essa nessun vertice compare più di due volte consecutivamente, si dice di base</u> v, <u>con</u> $v \in \mathcal{V}(G)$, <u>se il primo e l'ultimo termine coincidono con</u> v.

Se $s = v'_0 v_1 \ldots v'_{2n}$ è una successione di veritici di G e $t=(t_0, t_1, \ldots, t_n)$ con $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$ è una suddivisione dell'intervallo unitario I, definiamo un'applicazione $f : I \to \mathcal{V}(G)$ ponendo $f(t_i) = v_{2i}$ per $i = 0, \ldots, n$ ed $f(]t_i, t_{i+1}[) = v_{2i+1}$ per $i = 0, \ldots, n-1$.

L'applicazione f così costruita è chiaramente un 1-cammino regolare (si veda la definizione su [7] o su [2]) quasi-costante (cioé costante all'interno dei segmenti di una opportuna suddivisione t di I come nella definizione data in [4]) e tale cammino si dice associato alla successione s tramite la suddivisione t.

Se viceversa f è un 1-cammino regolare quasi-costante rispetto alla suddivisione $t = (t_0, \ldots, t_n)$, la successione $s = v'_0 v_1 \ldots v'_{2n}$ in cui $v_{2i} = f(t_i)$ per $i = 0, \ldots, n$ e $v_{2i+1} = f(]t_i, t_{i+1}[)$ per $i=0, \ldots, n-1$ è ammissibile e ad essa viene associato proprio l'1-cammino f tramite t.

Individueremo ora la relazione che lega successioni associate ad 1-cammini quasi-costanti regolarmente omotopi.

DEFINIZIONE 3.- Due successioni s ed s' si dicono correlate se una si può ottenere dall'altra con un numero finito di operazioni del tipo seguente

1) Inserire tra due termini consecutivi v_i e v_{i+1} due vertici coincidenti entrambi con v_i o con v_{i+1}.

2) Inserire tra v'_{2i} e v_{2i+1} una coppia di vertici $v_{2i}v$ o vv_{2i} o vv a seconda che si abbia $v_{2i} \leftarrow v \rightarrow v_{2i+1}$ o $v_{2i} \rightarrow v \leftarrow v_{2i+1}$ o $v_{2i} \rightarrow v \rightarrow v_{2i+1}$.

2') Inserire tra v_{2j-1} e v'_{2j} le coppie vv_{2j} o $v_{2j-1}v$ o vv a seconda che $v_{2j-1} \leftarrow v \rightarrow v_{2j}$ o $v_{2j-1} \rightarrow v \leftarrow v_{2j}$ o $v_{2j} \rightarrow v \rightarrow v_{2j-1}$.

La relazione individuata dalla definizione 3 è riflessiva e simmetrica; la relazione di equivalenza associata è quella individuata dalla seguente definizione.

DEFINIZIONE 4.- Due successioni s ed s' si dicono equivalenti se esiste un numero finito di successioni $s_0, s_1, \ldots s_n$ ciascuna correlata con la precedente e tali che $s_0 = s$ ed $s_n = s'$; in tal caso si scrive $s \cong s'$.

OSSERVAZIONE 1.- Dalla 1) segue subito che per ogni successione ve ne è una equivalente ridotta. Da 1) 2) e 2') segue che un termine v_j tra due termini $v_{j-1} = v_{j+1}$ uguali tra loro si può sostituire con v_{j-1}.

Come nella proprietà 3 di [1] si prova facilmente il seguente lemma tenendo conto della proprietà 3.5 di [6].

LEMMA 1.- *Se* t *e* t' *sono due suddivisioni distinte dell'intervallo* I *ed* s *è una successione ammissibile, gli 1-cammini* f *ed* f' *associati ad* s *tramite* t *e* t' *sono regolarmente omotopi.*

Se f *è un 1-cammino quasi-costante rispetto ad una suddivisione* $t = (t_0,\dots,t_n)$ *e se* $t' = (t'_0,\dots,t'_m)$ *è una suddivisione più fine di* t (tale cioè che $\forall i = 1,\dots,n-1 \ \exists j \in \{1,\dots,m-1\}$ con $t_i = t'_j$) *le successioni associate ad* f *tramite* t *e* t' *sono equivalenti.*

Dato un 1-cammino f *quasi-costante rispetto a* t *e* t', *le successioni associate ad* f *mediante* t *e* t' *sono equivalenti.*

In definitiva si può passare da un 1-cammino regolare quasi-costante ad una classe di equivalenza di successioni e da una successione ad una classe di omotopia regolare di 1-cammini indipendentemente dalla suddivisione di I.

LEMMA 2.- *Se* s *ed* s' *sono due successioni equivalenti, gli 1-cammini associati* f *ed* f' *sono regolarmente omotopi.*

Dimostrazione.- Basta provare l'enunciato per successioni correlate.

Sia $s = v_0\dots v_i v_{i+1}\dots v_{2n}$ ed $s' = v_0\dots v_i v_i v_{i+1}\dots v_{2n}$ sia ottenuta da s con un'operazione del tipo 1). Gli 1-cammini f ed f' associati ad s ed s' rispettivamente tramite $(t_0,\dots,t_n)$ e $(t_0,\dots,t_i,(t_i+t_{i+1})/2,\dots,t_n)$ coincidono.

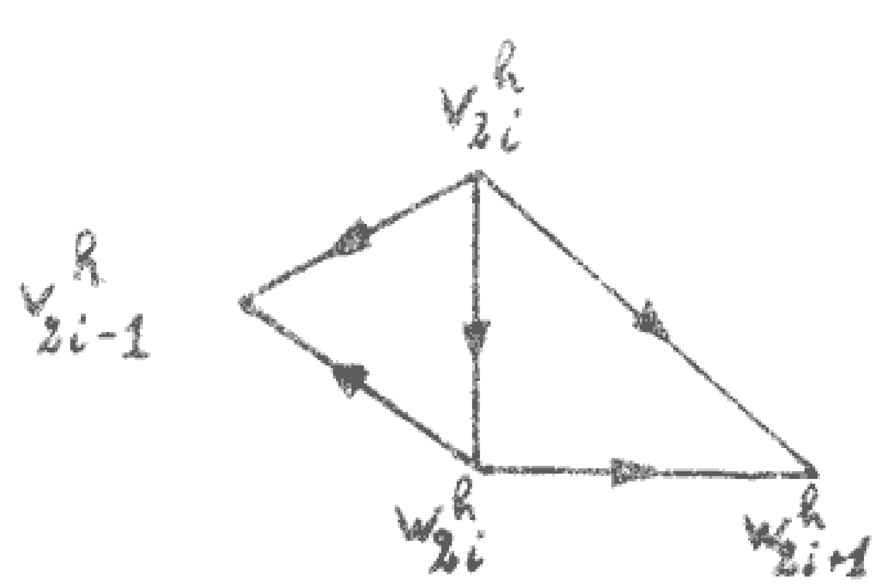
Se $s' = v'_0\dots v'_{2i} v v'_{2i+1} v_{2i+1}\dots v'_{2n}$ oppure $s' = v'_0\dots v_{2j-1} v'_{2j-1} v v'_{2j}\dots v'_{2n}$, l'applicazione $H : I^2 \to \mathcal{V}(G)$ definita da $H(x,y) = f(x)$ se $y \in [0,\frac{1}{2}]$, $H(x,y) = f'(x)$ se $y \in]\frac{1}{2},1]$ è un'omotopia regolare tra f ed f' ottenuti da s ed s' con una stessa suddivisione di I. Se invece s' è ottenuta da s in altro modo con un'operazione del tipo 2) o 2') si ha un'omotopia tra f ed f' ponendo $H(x,y) = f(x)$ se $y \in [0,\frac{1}{2}[$, $H(x,y) = f'(x)$ se $y \in [\frac{1}{2},1]$.

LEMMA 3.- *Se f ed f' sono due 1-cammini regolari quasi-costanti con $f(0) = f'(0)$ ed $f(1) = f'(1)$ e se f ed f' sono regolarmente omotopi relativamente a $\{0,1\}$, allora le successioni s ed s' associate ad f ed f' sono equivalenti.*

Dimostrazione.- Sia $H : I^2 \to \mathcal{V}(G)$ un'omotopia regolare costante all'interno dei rettangoli $A_k^h = [t_k,t_{k+1}] \times [\tau_h,\tau_{h+1}]$ e all'interno dei lati di tali rettangoli, essendo $(t_0,\ldots,t_n)$ e $(\tau_0,\ldots,\tau_m)$ opportune suddivisioni di I(1).

Indichiamo con $s^h = v_0'^h v_1^h \ldots v_{2n}'^h$ ed $r^k = w_0'^k \ldots w_{2n}'^k$ le successioni individuate dalle restrizioni di H a $\{\tau_h\} \times I$ ed a $\{\frac{1}{2}(\tau_k+\tau_{k+1})\} \times I$ rispettivamente, con $h = 0,\ldots,m$ e $k = 0,\ldots,m-1$; proveremo allora che $s^h \approx r^h$ $\forall h = 0,\ldots,m-1$.

Sia infatti $2i$ il primo indice tale che $v_{2i}^h \neq w_{2i}^h$, cioè sia $r^h = v_0'^h \ldots v_{2i-1}^h w_{2i}'^h \ldots w_{2n}'^h$ si ha allora $v_{2i}^h \to v_{2i-1}^h, w_{2i}^h \to v_{2i-1}^h, v_{2i}^h \to w_{2i}^h$, $v_{2i}^h \to w_{2i+1}^h$, $w_{2i}^h \to w_{2i+1}^h$.



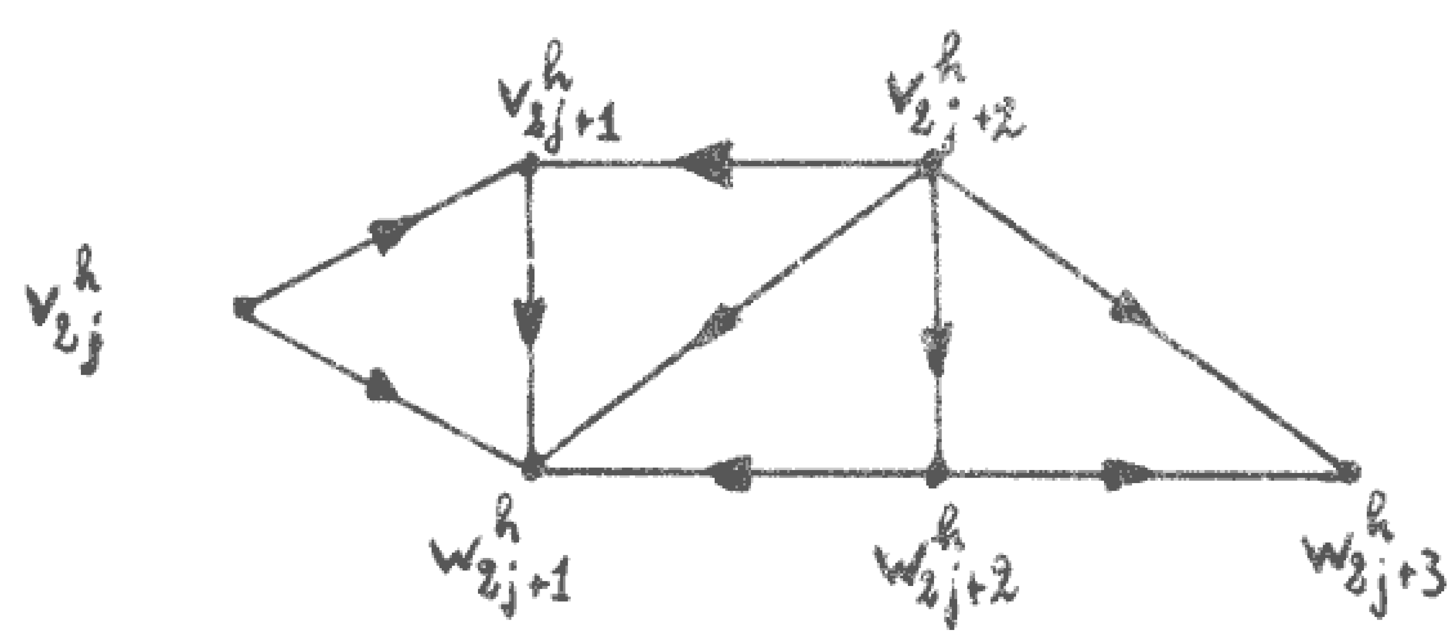
Utilizzando la definizione 3 si ottiene

---

(1) Ricordiamo che, analogamente a quanto si è visto in [5], si prova in [4] che tra due cammini quasi-costanti regolarmente omotopi vi è un'omotopia regolare quasi-costante.

$r^h \cong v_0'^h \dots v_{2i-1}^h v_{2i}'^h \; w_{2i}^h \; w_{2i}'^h \; w_{2i+1}^h \dots w_{2n}'^h \cong v_0'^h \dots v_{2i}'^h \; w_{2i+1}^h \dots w_{2n}'^h$.

Se invece è $2j+1$ il primo indice tale che $v_{2j+1}^h \neq w_{2j+1}^h$ si ha $v_{2j}^h \to v_{2j+1}^h$, $v_{2j}^h \to w_{2j+1}^h$, $v_{2j+1}^h \to w_{2j+1}^h$, $v_{2j+2}^h \to w_{2j+1}^h$, $v_{2j+2}^h \to w_{2j+2}^h$, $w_{2j+2}^h \to w_{2j+3}^h$, $w_{2j+2}^h \to w_{2j+1}^h$, $w_{2j+2}^h \to w_{2j+3}^h$.



Risulta allora $r^h \cong v_0'^h \dots v_{2j}'^h \; w_{2j+1}^h \; v_{2j+2}'^h$

$w_{2j+2}^h \; w_{2j+2}'^h \; w_{2j+3}^h \dots w_{2n}'^h \cong v_0'^h \dots v_{2j}'^h \; v_{2j+1}^h \; v_{2j+2}'^h \; w_{2j+3}^h \dots w_{2n}'^h$.

Si ha così una catena finita di successioni equivalenti con termine iniziale r^h e termine finale s^h.

Con ragionamento analogo si prova che $r^{k-1} \cong s^k \;\; \forall\, k = 1,\dots,m$ quindi $s \cong s'$.

<u>DEFINIZIONE</u> 5.- <u>Se</u> $s = v_0' \dots v_{2n}'$ <u>ed</u> $r = u_0' \dots u_{2m}'$ <u>con</u> $u_0 = v_{2n}$, <u>si definisce somma di</u> s <u>e di</u> r <u>e si indica con</u> $s * s$ <u>la successione</u> $v_0' \dots v_{2n}' u_1 \dots u_{2m}'$.

Tale legge di composizione è associativa e la relazione di equivalenza della definizione 4 è compatibile con essa.

L'insieme $\pi(G,v)$ delle classi di equivalenza di successioni di base v

con la legge di composizione indotta da $*$, che indichiamo ancora con $*$, è un gruppo; l'elemento neutro è la classe $[s = v]$ e l'inversa della classe $[s = v'_0 \dots v'_{2n}]$ è $[s^{-1} = v'_{2n} \dots v'_0]$.

TEOREMA 1. Se v è un vertice di G il primo gruppo di omotopia regolare di $G, Q_1(G,v)$, è isomorfo a $\pi(G,v)$.

Dimostrazione.- Osserviamo intanto che in ogni classe di omotopia di 1-cammini regolari vi è un 1-cammino regolare quasi-costante (si veda [4]). Le applicazioni $\phi : \pi(G,v) \to Q_1(G,v)$ e $\psi : Q_1(G,v) \to \pi(G,v)$ definite in modo ovvio dal lemma 1 e dal lemma 2 rispettivamente sono compatibili con le strutture di gruppo e sono una l'inversa dell'altra.

Se G è connesso $Q_1(G,v)$ non dipende da v per cui porremo anche $(G,v) = \pi(G)$.

OSSERVAZIONE 2.- Se $\hat{G}$ è il grafo non orientato associato al grafo orientato G è chiaro che un n-cammino regolare di G lo è anche di $\hat{G}$, quindi se $v \in \mathcal{V}(G)$ e $\hat{Q}_n(\hat{G},v)$ è l'ennesimo gruppo di omotopia regolare di $\hat{G}$ si ha $\hat{Q}_n(\hat{G},v) \neq 0 \Longrightarrow Q_n(G,v) \neq 0$.

L'implicazione inversa non è verificata come provano gli esempi che daremo in seguito.

OSSERVAZIONE 3.- Se G non ha circuiti, cioé è un albero, si ha $Q_1(G,v)=0$ per ogni fissato vertice v. In effetti per ogni successione ridotta $s = vv_1 \dots v_{2n-1}v$ di base v esiste un vertice v_i che nella successione è preceduto e seguito da uno stesso vertice $v_{i-1} = v_{i+1}$ per cui sostituendo v_i con v_{i-1} si ottiene una successione $s' \cong s$. Riducendo s' e ripetendo il ragionamento si ha che s è equivalente alla successione costante v.

Si ha allora che dato un grafo connesso G esiste un sottografo connesso

F contenente tutti i vertici di G e tale che $Q_1(F) = 0$; basta considera re F in modo che il corrispondente grafo non orientato $\hat{F}$ sia un albero massimale di $\hat{G}$.

2. Siano ora G un grafo connesso, F un suo sottografo ed $L(G)$ il gruppo libero generato da $\mathcal{L}(G) \cup \mathcal{V}(G)$; indichiamo con g_{ij} l'elemento individuato dal lato (v_i,v_j) e con g_{ii} quello individuato dal vertice v_i. Sia inoltre $K(F)$ il più piccolo sottogruppo normale contenente gli elementi di $L(G)$ del tipo g_{ij} con $v_i \to v_j$ in F e $g_{ij} + g_{jk} - g_{ik}$ se v_i,v_j,v_k formano un circuito transitivo in G oppure $v_i = v_k$.

Posto $L(G,F) = L(G)/K(F)$ si prova il seguente teorema come in [8] n. 6.3.6.

<u>TEOREMA</u> 2. <u>Se</u> F <u>è connesso</u>, $Q_1(F) = 0$ <u>e</u> $\mathcal{V}(F) = \mathcal{V}(G)$ <u>allora</u> $\pi(G) = L(G,F)$.

<u>Dimostrazione</u>.- Se $v_i \in \mathcal{V}(G)$ fissiamo una successione s_i da un vertice assegnato v_0 a v_i in F e, se $v_i \to v_j$ in G, poniamo $\xi_{ij}=s_i*v_iv_jv_j*\bar{s}_j$ e $\xi_{ii} = s_i*s_i^{-1}$. Poiché $\pi(F) = 0$ si ha chiaramente che ogni successione di base v_0, $s = v_0\, v_1 \ldots v_{2n-1}\, v_0$, è equivalente a $\xi_{01}*\xi_{12}*\ldots*\xi_{(2n-1)0}$ quindi $[s] = [\xi_{01}]*\ldots*[\xi_{(2n-1)0}]$ per cui le classi del tipo $[\xi_{ij}]$ e $[\xi_{ii}]$ generano $\pi(G,v_0)$.

L'omomorfismo $\phi : L(G) \to \pi(G)$ definito da $\phi(g_{ij}) = [\xi_{ij}]$ è suriettivo e si ha $\phi(K(F)) = \{[v_0]\}$ per cui ϕ induce un epimorfismo $\bar{\Phi}$ di $L(G,F)$ su $\pi(G)$; in effetti se $v_i \to v_j$ in F è $\phi(g_{ij}) = [s_i*v_iv_jv_j*s_j^{-1}] =$

$[v_0]$ e se $v_i \to v_j$, $v_j \to v_k$, $v_i \to v_k$ in G si ha $\phi(g_{ij}+g_{jk}-g_{ik}) =$

$= [\xi_{ij}*\xi_{jk}*\xi_{ik}^{-1}] = [s_i*v_iv_jv_j*s_j^{-1}*s_j*v_jv_kv_k*s_k^{-1}*s_k*v_kv_kv_i*s_i^{-1}] =$

$[s_i*v_iv_iv_i*s_i^{-1}] = [v_0]$.

Viceversa posto $\psi(s) = g_{01}+g_{12}+\dots+g_{(2n-1)0}$ per $s = v_0v_1\dots v_{n-1}v_0$ e $\psi(s=v_0) = 0$ si ha $s \cong s' \Longrightarrow \psi(s) \equiv \psi(s')$ modK(F); infatti se $s' = v_0\dots$ $\dots v_{i-1}v_iv_iv_iv_{i+2}\dots v_0$ è $\psi(s') - \psi(s) = g_{01} + \dots + g_{(i-1)i}+2g_{ii}-(g_{01}+\dots$ $\dots g_{(i-1)i}) \in K(F)$ poiché $g_{ii} \in K(F)$; se poi s' si ottiene con un'operazione del tipo 2) o 2'), ad esempio se $s' = v_0'\dots v_i'v_jv_j'v_{i+1}\dots v_0'$ si ha

$\psi(s') - \psi(s) = g_{01}+\dots+g_{(i-1)i}+g_{ij}+g_{jj}-g_{ij}+g_{ij}+g_{j(i+1)}-g_{i(i+1)}-$

$-(g_{01}+\dots+g_{(i-1)i}) \in K(F)$ poiché $g_{ij}+g_{jj} - g_{ij}$ e $g_{ij}+g_{j(i+1)}-g_{i(i+1)}$ stanno in $K(F)$.

Inoltre $\psi(s*r) = \psi(s) + \psi(r)$ per cui posto $\Psi([s]) = [\psi(s)]_{\mathrm{mod}K(F)}$ si definisce un omomorfismo $\Psi : \pi(G) \to L(G,F)$.

Infine $\Psi \circ \Phi = 1$, infatti $\Psi(\Phi(g_{ij})) = [\psi(s_i)+\psi(v_iv_jv_j)+\psi(s_i^{-1})] =$ $=[g_{ij} + g_{jj}] = [g_{ij}]$, quindi Φ oltre che suriettivo è anche iniettivo.

<u>OSSERVAZIONE</u> 4. Come in [8] si prova che se $\mathcal{V}(G)$ è ordinato e se valgono le ipotesi del teorema precedente allora $\pi(G)$ è isomorfo al gruppo

generato dagli elementi g_{ij} con $i < j$, $v_i \not\to v_j$ e $v_j \not\to v_i$ in F con le relazioni $g_{ij} + g_{jk} = g_{ik}$ se $v_i v_j v_k$ formano un circuito triangolare transitivo (anche degenere) di G ma non di F con $g_{rs} = 0$ se $(v_r, v_s) \in \mathcal{L}(F)$.

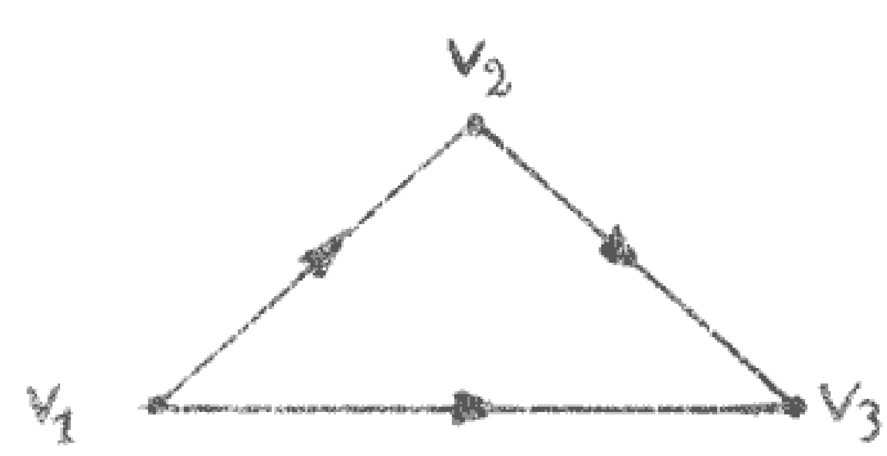
Inoltre è evidente che $Q_1(G)$ ha un numero finito di generatori e un numero finito di relazioni. Se poi G non ha circuiti triangolari transitivi $Q_1(G)$ è libero.

OSSERVAZIONE 5. Come in [1] si prova che se G è unione di due grafi G' e G'' connessi che hanno in comune un solo vertice e nessun lato si ha $Q_1(G) \cong Q_1(G') \oplus Q_1(G'')$.

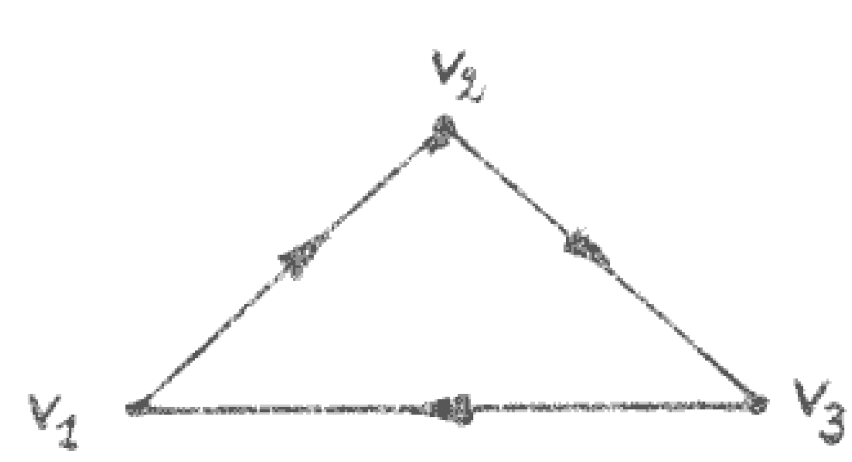
OSSERVAZIONE 6. E' noto (si veda [7]) che un grafo orientato in cui vi è un vertice che precede (o che segue) tutti gli altri ha tutti i gruppi di omotopia regolare nulli. Si verifica inoltre che se i soli circuiti irriducibili di G sono triantolari e transitivi allora $Q_1(G) = 0$.

Calcoleremo ora il primo gruppo di omotopia regolare di grafi orientati i cui corrispondenti grafi non orientati hanno tutti gruppo di omotopia regolare di dimensione uno nullo.

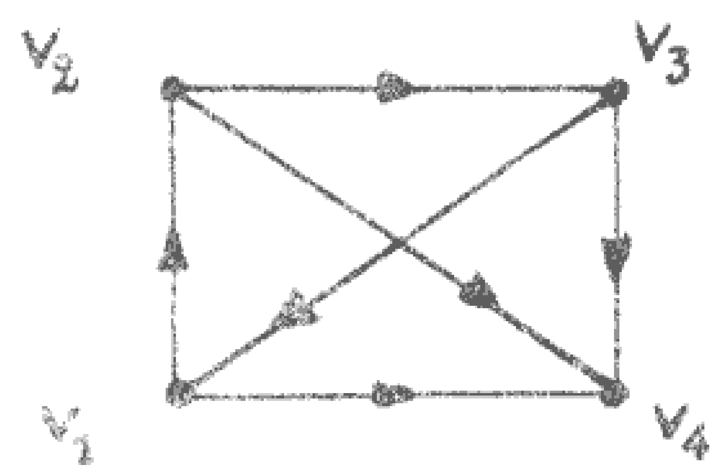
ESEMPIO 1. Un grafo orientato completo (tournament) G con tre vertici ha gruppo $Q_1(G) = \{0\}$ se è transitivo,



$Q_1(G) \cong Z$ se è un ciclo

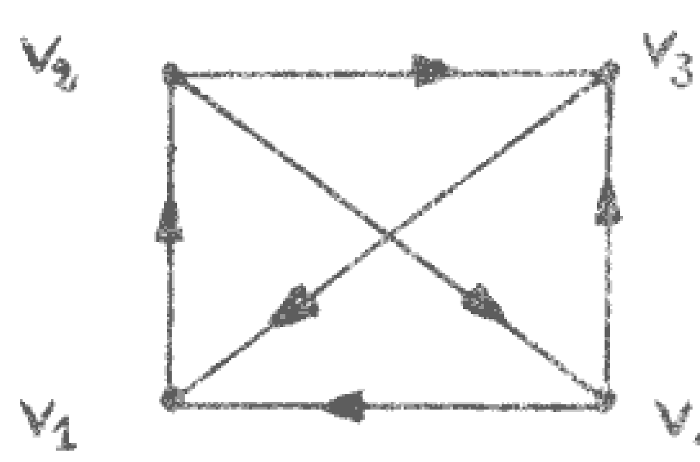


ESEMPIO 2. Un grafo completo con quattro vertici ha gruppo $Q_1(G) = \{0\}$ se ha solo un ciclo



In effetti in tal caso il sottografo F ottenuto togliendo a G un lato, diciamo (v_1,v_2) dell'unico cilco (v_1,v_2,v_3) è connesso e, chiaramente, $Q_1(F) = \{0\}$ e $\mathcal{V}(F) = \mathcal{V}(G)$; $Q_1(G)$ è dunque generato, per il Teorema 2, da g_{12} con la relazione $g_{12} = g_{14} + g_{42} = 0$.

Se invece G ha due cicli, esiste certamente un lato, diciamo ancora (v_1,v_2), che fa parte di entrambi i cicli.

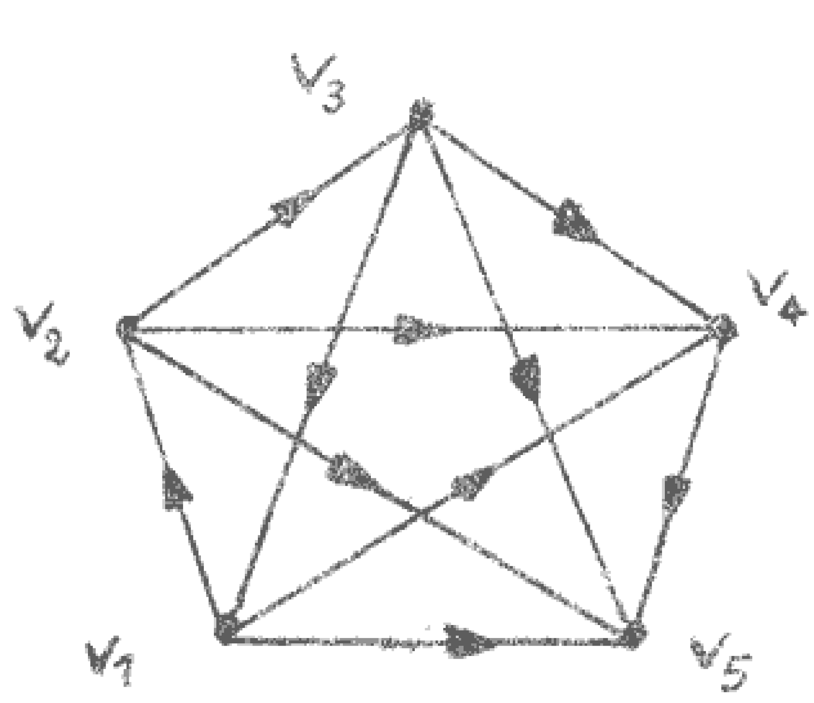


Posto in tal caso $F = \mathcal{V}(G) \cup (\mathcal{L}(G) - \{(v_1,v_2)\})$ si ha chiaramente che $Q_1(F) = \{0\}$, $\mathcal{V}(F) = \mathcal{V}(G)$ ed F è connesso; procedendo come nel caso precedente si ricava che $Q_1(G)$ è isomorfo al gruppo libero generato da g_{12} poiché (v_1,v_2) non fa parte di alcun circuito triangolare transitivo.

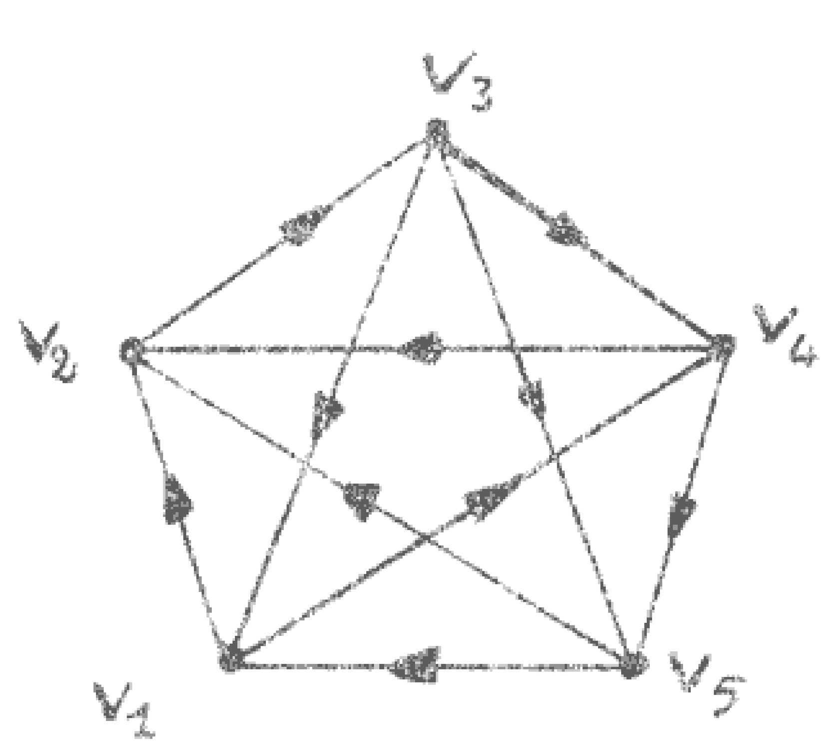
Si tenga presente inoltre che un tournament con 4 vertici non può avere più di due cicli.

ESEMPIO 3. Sia G un grafo completo con cinque vertici; tale grafo ha al più cinque cicli tra i suoi dieci circuiti triangolari.

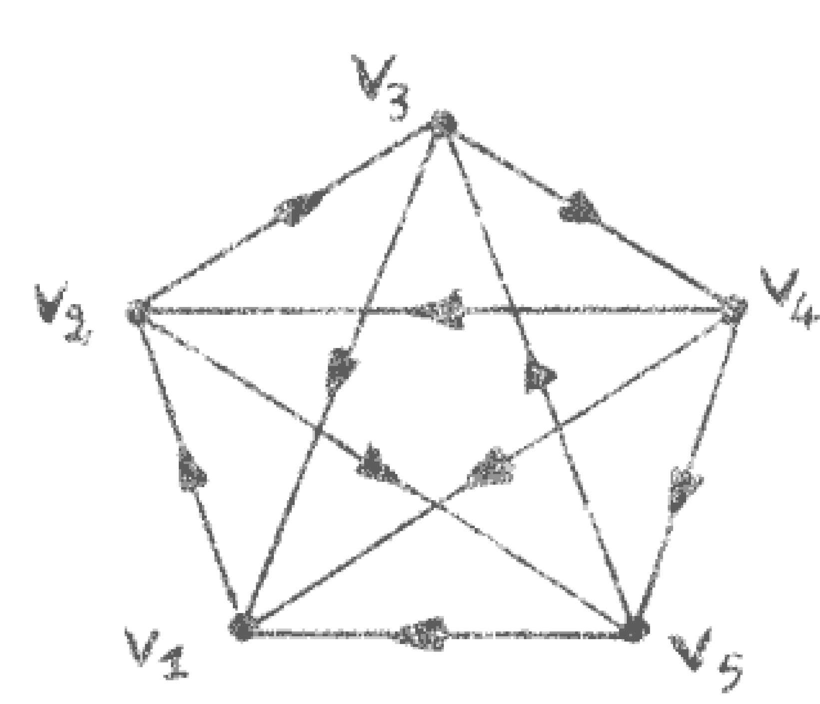
Se G ha un solo ciclo o due cicli si ha banalmente $Q_1(G) = \{0\}$.



1 ciclo



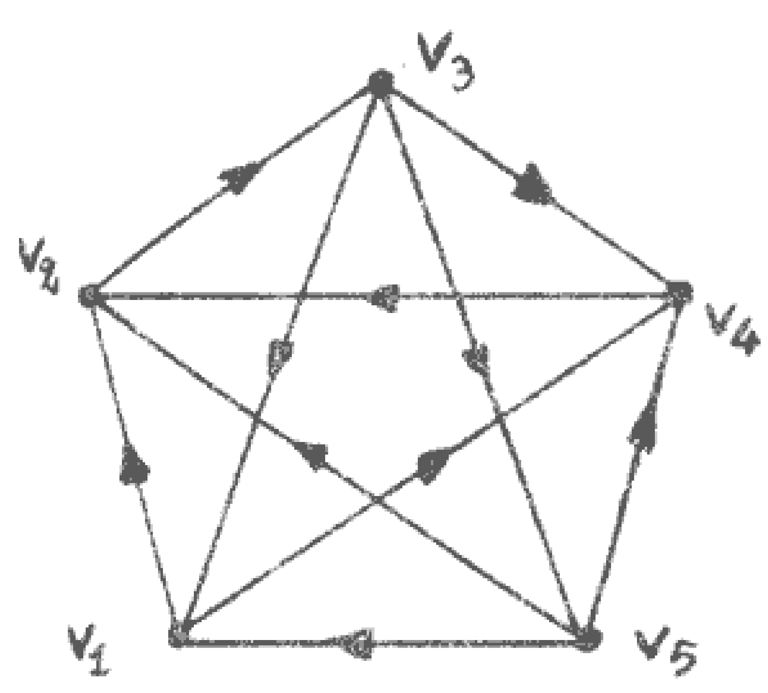
2 cicli



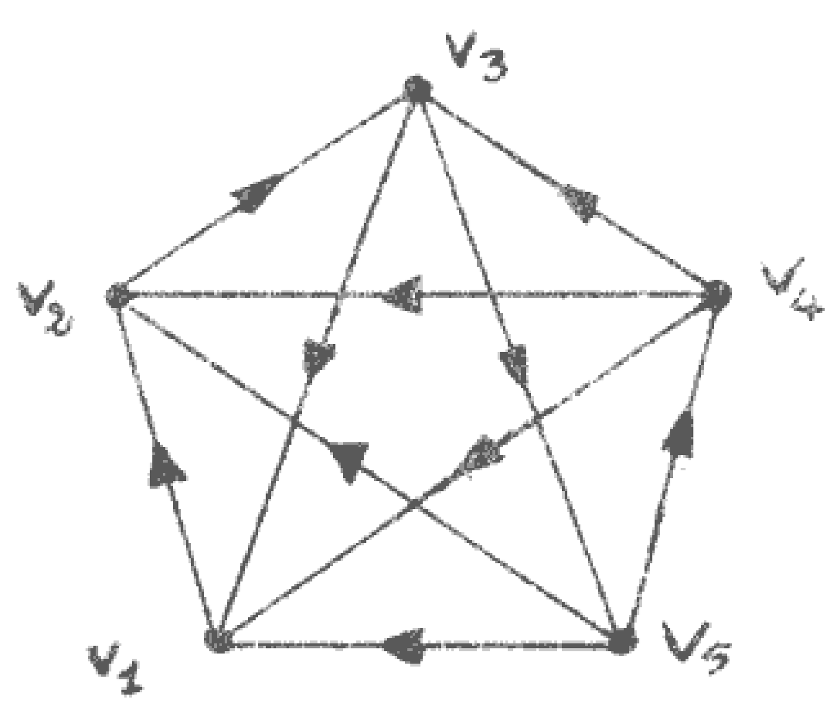
2 cicli

basta infatti considerare $F = \mathcal{V}(G) \cup (\mathcal{L}(G) - \{(v_2,v_3)\})$ nel primo caso, $F = \mathcal{V}(G) \cup (\mathcal{L}(G) - \{(v_2,v_3),(v_3,v_4)\})$ negli altri due casi ed utilizzare il Teorema 2.

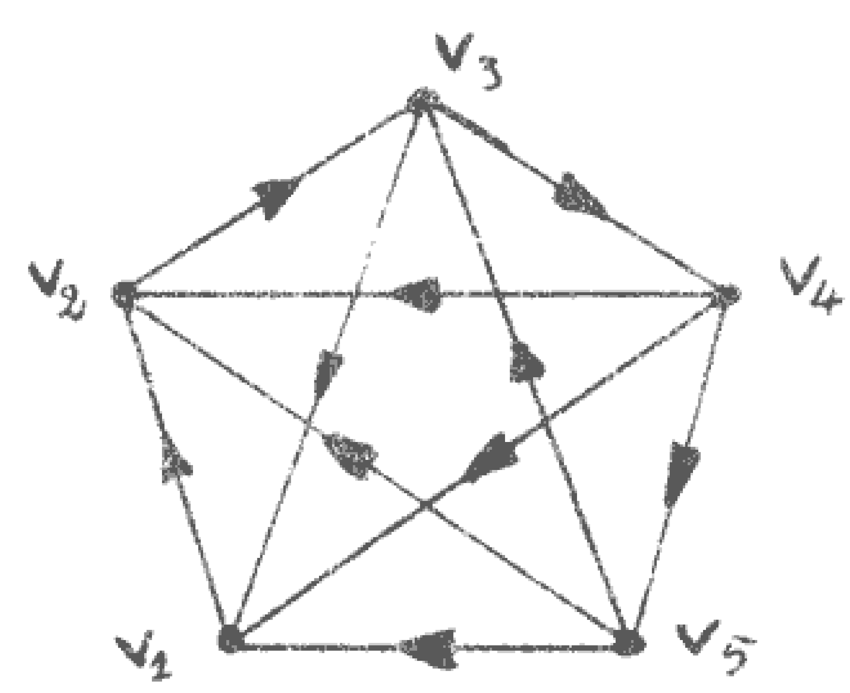
Se G ha tre cicli con un lato comune si prova che $Q_1(G) \cong Z$ se ha tre cicli senza un lato comune $Q_1(G) = \{0\}$, utilizzando i sottografi indicati nelle figure



$F=\mathcal{V}(G)\cup(\mathcal{L}(G)-\{(v_2,v_3)\})$

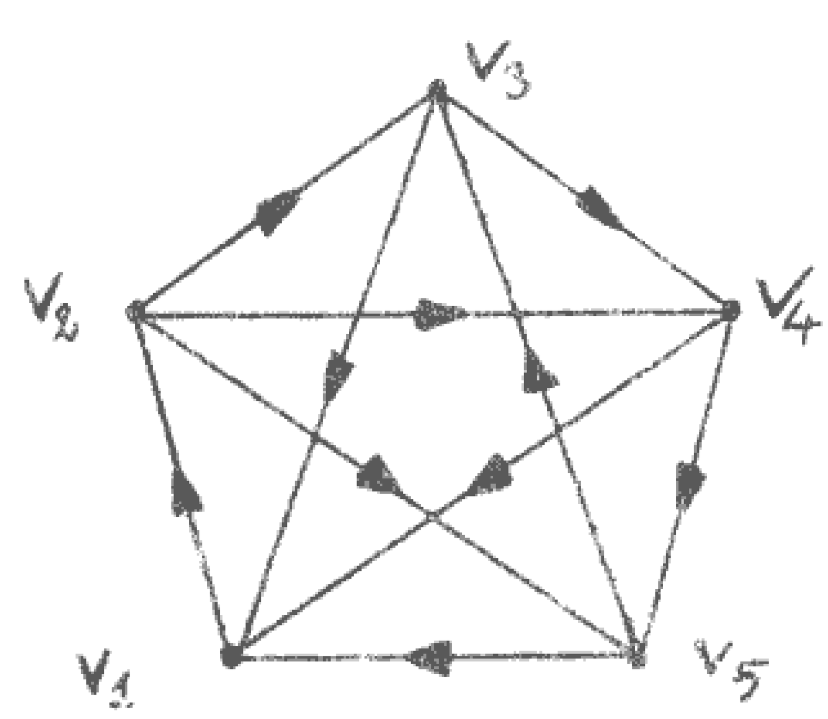


$F=\mathcal{V}(G)\cup(\mathcal{L}(G)-\{(v_2,v_3),(v_4,v_5)\})$



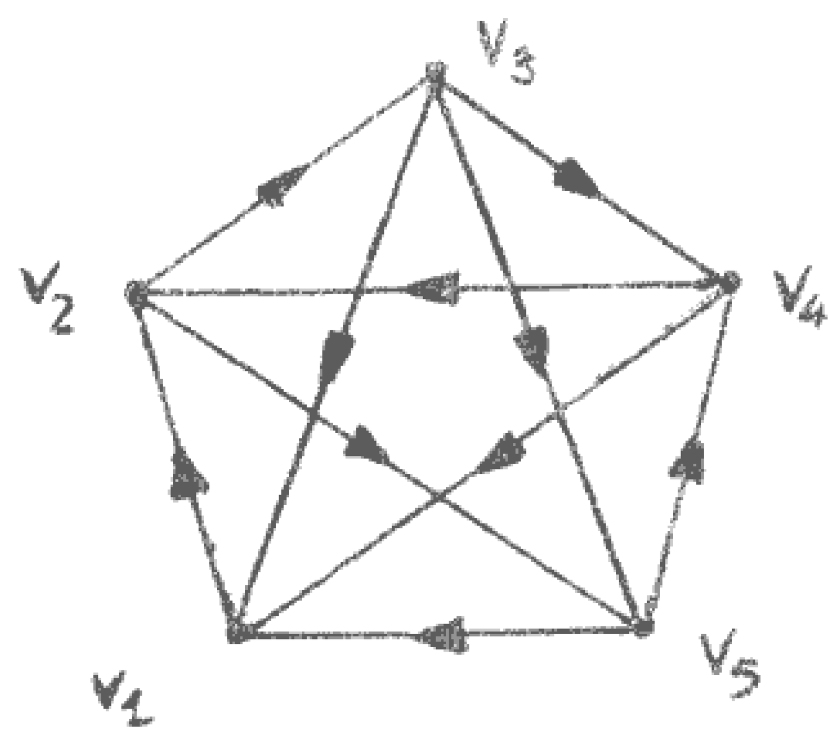
$F=\mathcal{V}(G)\cup(\mathcal{L}(G)-\{(v_2,v_3),(v_3,v_4),(v_5,v_4)\})$

Se G ha quattro cicli, tre dei quali con un lato comune, allora l'unica disposizione possibile (a meno di isomorfismi di grafi) è quella mostrata in figura



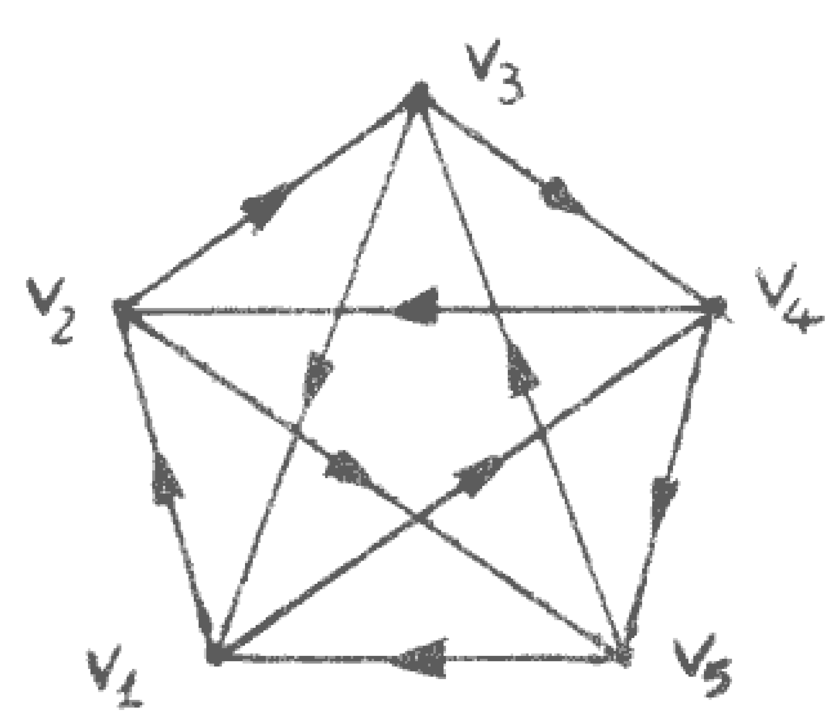
e ponendo $F = \mathcal{V}(G) \cup (\mathcal{L}(G) - \{(v_1,v_2),(v_3,v_4)\})$ si ha che $Q_1(G)$ è isomorfo al gruppo generato da g_{12} e g_{34} con la relazione $g_{34}=g_{31}-g_{41}=0$, cioé è isomorfo a $\mathbb{Z}$.

Se G ha quattro cicli ma nessun lato è comune a tre di essi, l'unica disposizione rispetto alla quale $Q_1(G)$ non è nullo è mostrata in figura, sempre a meno di isomorfi di grafi,



in tal caso posto $F = \mathcal{V}(G) \cup (\mathcal{L}(G) - \{(v_2,v_3),(v_2,v_5)\}$ si ottiene, per il Teorema 2, che $Q_1(G)$ è isomorfo al gruppo generato da g_{23} e g_{25} con la relazione $g_{23} = g_{25}$, quindi $Q_1(G) \cong Z$.

Se G ha cinque cicli, a meno di isomorfismi si ha



posto allora $F = \mathcal{V}(G) \cup (\mathcal{L}(G) - \{(v_2,v_3),(v_2,v_5),(v_4,v_5)\})$ si ottiene che $Q_1(G)$ è isomorfo al gruppo generato da g_{23}, g_{25}, g_{45} con le relazioni $g_{23} = g_{25} = g_{45}$, quindi ancora $Q_1(G) \cong Z$.

Accettato per la pubblicazione sulla Rivista "Accademia di Scienze Lettere e arti di Palermo"