# ON SOME TOPOLOGICAL-TYPE PROPERTIES OF CERTAIN ELEMENTS OF A PARTIALLY ORDERED SET

by Domenico LENZI, ISTITUTO DI MATEMATICA DELL'UNIVERSITA', LECCE

SOMMARIO. - D. DRAKE e W.J. THRON hanno dato in [1] una caratterizzazione degli elementi v-irriducibili e degli elementi fortemente v-irriducibili di un reticolo distributivo $(L,\leq)$. Tra l'altro in [1] è stato provato che un elemento $c \in L$ è irriducibile se e solo se si può identificare $(L,\leq)$, tramite un isomorfismo reticolare $f$, con un sottoreticolo $(L',\leq)$ del reticolo delle parti $\mathcal{P}(X)$ di un opportuno insieme $X$ in tal modo che $f(c)$ è la chiusura in $L'$ di un certo elemento $x \in X$ (cioè $f(c)$ è il più piccolo elemento di $L'$, rispetto all'inclusione insiemistica, cui appartiene $x$).

Come è ben noto un elemento di un reticolo distributivo è v-irriducibile se e solo se esso è v-primo. Questa proprietà è usata in maniera essenziale in [1]. In questo lavoro noi prendiamo lo spunto da questa proprietà per dare una caratterizzazione degli elementi v-primi e degli elementi fortemente v-primi di un qualsiasi insieme parzialmente ordinato (in particolare di un qualsiasi reticolo $(S,\leq)$). Precisiamo che qui, in analogia con una caratterizzazione degli elementi v-primi e degli elementi fortemente v-primi di un reticolo, un elemento $c$ di un insieme parzialmente ordinato $(S,\leq)$ è detto v-primo se il sottoinsieme $D_c=\{s\in S : c\nleq s\}$ è v-diretto, cioè $D_c=\emptyset$ oppure per ogni $x_1,x_2\in D_c$ (per ogni $x_1,\ldots,x_n\in D_c$) esiste $t\in D_c$ tale che $x_1\leq t$ e $x_2\leq t$ ($x_i\leq t$ per ogni $i=1,\ldots,n$); inoltre $c$ è detto fortemente v-primo se $D_c=\emptyset$ oppure $D_c$ è dotato di massimo. Allora noi proviamo che un elemento $c\in S$ è v-primo in $(S,\leq)$ se e solo se possiamo identificare $(S,\leq)$, tramite un isomorfismo $f$ rispetto all'ordinamento, con un insieme di insiemi (non necessariamente un reticolo di insiemi) del tipo di [1] in modo tale che $f(c)$ è la chiusura in $(f(S),\leq)$ di un elemento di $\cup f(S)$; inoltre proviamo che $c$ è fortemente v-primo in $(S,\leq)$ se e solo se per ogni isomorfismo $f$ del tipo su menzionato l'insieme $f(c)$ è la chiusura in $(f(S),\leq)$ di un punto di $\cup f(S)$.

SUMMARY. - A characterization of v-irreducible elements and of strongly v-irreducible elements of a distributive lattice $(L,\leq)$ was given by D.DRAKE and W.J. THRON in [1]. Among other things in [1] it was proven that an element $c \in L$ is v-irreducible iff one can identify $(L,\leq)$, by means of a lattice isomorphism f, with a sublattice $(L',\leq)$ of the power set $P(X)$ of a suitable set $X$, in such a way that $f(c)$ is the closure in $L'$ of an element $x \in X$ (i.e. $F(c)$ is the minimum element in $L'$, with respect to the set inclusion, including x).

As is well-known an element of a distributive lattice is v-irreducible iff it is v-prime. This property is exploited is an essential manner in [1]. Now then in our paper we took this property as a starting point for a characterization of v-prime and of strongly v-prime elements of any partially ordered set (in particular of any lattice). Here, on the analogy of some characterization of v-prime elements and of strongly v-prime elements of a lattice, an element c of a partially ordered set (shortly "poset" $(S,\leq)$ is said v-prime iff the subset $D_c = \{s \in S : c \nleq s\}$ is v-directed, i.e. $D_c = \emptyset$ or for every $x_1, x_2 \in D_c$ (for every $x_1,\ldots,x_n \in D_c$) there exists $t \in D_c$ such that $x_1 \leq t$ and $x_2 \leq t$ ($x_i \leq t$ for every $i = 1,\ldots n$); moreover c is said strongly v-prime if $D_c = \emptyset$ or $D_c$ has maximum element. Then we prove than an element $c \in S$ is v-prime in $(S,\leq)$ iff we can identify $(S,\leq)$ by means of an order isomorphism f, with a set (but not necessarily a lattice) of sets of the type of [1] in such a way that $f(c)$ is the closure in $(f(S),\leq)$ of an element of $\cup f(S)$; moreover we prove that c is strongly v-prime in $(S,\leq)$ iff for all function f of the above type the set $f(c)$ is the closure in $(f(S),\leq)$ of an element of $\cup f(S)$.

N. 1 PRELIMINARY CONSIDERATIONS.

We recall that a lattice is said a set lattice (see [1] p. 57) iff its elements are subsets of a suitable set X and the order relation is the set inclusion; in particular if the lattice is a sublattice of the power set $\mathcal{P}(X)$ then it is called a proper set lattice.

More generally we shall say that a set lattice $(L',\subseteq)$ is a "$\cup$-proper set lattice" iff the lattice join is equal to the set union.

We recall also that a proper set representation of a lattice $(L,\leq)$