estremali.

L'operatore $\mathcal{E}$ prende il nome di operatore di Eulero-Lagrange e l'equazione $\mathcal{E}[s]\omega = 0$ è la versione intrinseca del classico sistema di equazioni di Lagrange per l'estremali.

In un sistema di coordinate adattato, supposto $\omega = dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^m$ avremo

$$d_{JE/M}\mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i}(js)d_{JE/M}q^i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i_\mu}(js)d_{JE/M}q^i_\mu$$

da cui

$$\mathfrak{I}[s]\nu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i}(js)\nu^i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i_\mu}(js)\frac{\partial}{\partial x^\mu}\nu^i$$

essendo $\nu = \nu^i \frac{\partial}{\partial q^i}(s)$

ne segue

$$< \nu, \mathcal{E}[s]\,\omega > = \nu^i \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i}(js) - \frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i_\mu}(js)\right) dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^m$$

e infine

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i}\left(x^n, s^j, \frac{\partial s^j}{\partial x^n}\right) = \frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i_\mu}\left(x^n, s^j, \frac{\partial s^j}{\partial x^n}\right)$$

## 3. La forma di Poincaré-Cartan.

3.1. Proposizione: Esiste una forma canonica $\Theta$ su $J'(E)$ a valori nel modulo delle sezioni di $\pi^* vTE$.

Dimostrazione

Sia $\bar{v} \in T_{j_x s}(J^1(E))$ un vettore dello spazio tangente a $J'(E)$ in $j_x s$

$$w = d\pi_{j_x s}(\bar{v}) - d\, s_x(djp_{j_x s}\bar{v})$$ è un vettore di $T_{s(x)}E$

ovviamente $dp_{s(x)}(w) = 0$ quindi $w$ è un vettore verticale di $T_{s(x)}E$ .

Resta da far vedere che $w$ non dipende dalla sezione $s$ ma solo da $j_x s$: anche questo è evidente poiché se $j_x s = j_x s' \Longleftrightarrow ds_x = ds'_x$ .

Poniamo $w = \Theta(j_x s(\bar{v})$

$\Theta$ è quindi una 1-forma su $J'(E)$ a valori in $\pi^* vTE$.

Scegliendo un sistema di coordinate adottato abbiamo

$$\Theta = (dq^j - q^j_\mu dx^\mu) \otimes \frac{\partial}{\partial q^j} .$$

3.2. $\Theta$ permette di caratterizzare i rilevamenti canonici

Proposizione. Sia $\bar{s} : U \to J'(E)$ una sezione di $J'(E)$ su un aperto $U \subset M$.

$\bar{s} = j(\pi \circ \bar{s})$ se e solo se $\Theta_{|js(U)} = 0$ .

La dimostrazione segue immediatamente dall'espressione locale di $\Theta$.

3.3. Sia $\mathcal{L} : J'(E) \to R$ una funzione sui jets.

Ricordiamo che $\pi : J'(E) \to E$ è un fibrato affine, cioè ogni fibra $J'_e(E)$ su $e \in E$ è uno spazio affine associato allo spazio vettoriale $p^*_e T^* M \otimes (vT_e E)$, [2] .

Se restringiamo $\mathcal{L}$ a una fibra $\pi^{-1}(e)$ possiamo farne la derivata indotta dalla struttura affine, [3].

Sia $j_x s \in \pi^{-1}(e)$, indichiamo con $D\mathcal{L}(j_x s)$ questa derivata nel punto $j_x s$ .

$D\mathcal{L}$ è quindi un'applicazione da $J'(E)$ nel duale del suo fibrato vettoriale associato.

$$D\mathcal{L} : J'(E) \to p^* TM \otimes_E (vTE)^* .$$

In coordinate adattate $D\mathcal{L}(j_x s) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i_\mu}(j_x s) \frac{\partial}{\partial x^\mu} \otimes dq^i$ .

$D\mathcal{L}$ si chiama trasformata di Legendre indotta da $\mathcal{L}$

3.4. Sia $\bar{v} \in T_{j_x s} J'(E)$ posto $w = \Theta(\bar{v}) \in v\, T_e E$, $e = \pi(j_x s) = s(x)$, possiamo contrarre il vettore $w$ con il tensore $D\mathcal{L}(j_x s)$ rispetto alla contrazione di dualità di $vT_e E$.

Otteniamo così un vettore di $T_x M$ che indichiamo con $\mathcal{L}\hat{}\,\bar{v}$ .
Se $Z$ è un campo vettoriale di $J'(E)$ l'applicazione

$j_x s \mapsto \mathcal{L}\hat{}Z(j_x s)$ è una sezione del fibrato vettoriale $(jp)^* TM$,

che indichiamo con $\mathcal{L}\hat{}Z$.

La sua espressione in coordinate è

$$\mathcal{L}\hat{} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i_\mu} (dq^i - q^i_\nu dx^\nu) \frac{\partial}{\partial x^\mu}$$

3.5. Sia $\omega$ una m-forma su M. Costruiamo tramite $\mathcal{L}\hat{}$ una m-forma su $J^1(E)$, che chiameremo $\mathcal{L}\hat{}\omega$, secondo la formula

$$\mathcal{L}\hat{}\omega(Z_1,\dots,Z_m) = \sum_i \omega(T_{jp}(Z_1),\dots,\mathcal{L}\hat{}(Z_i),\dots,T_{jp}(Z_m)) \; .$$

La sua espressione locale è $\mathcal{L}\hat{}\,\omega = \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i_\mu} (dq^i - q^i_\nu\, dx^\nu) \wedge \Omega_\mu$

dove $\Omega_\mu = (-1)^{\mu-1} dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^\mu} \wedge \dots \wedge dx^m$ .

3.6. Definizione. Si dice m-forma di Poincaré-Cartan di un problema variazionale la

$$\Theta = \mathcal{L}\hat{}\,\omega + \mathcal{L}(jp)^*\,\omega$$

dove $\mathcal{L}$ è la Lagrangiana del problema e $\omega$ l'orientazione di M.

3.7. Proposizione. per ogni sezione $s$ di $E, (js)^* \text{(H)} = (js)\mathcal{L}\omega$

Basta mostrare che $(js)^* \hat{\mathcal{L}}\ \omega = 0$ ;

infatti $(js)^* \hat{\mathcal{L}}\omega\ (X_1,\dots,X_m) =$

$$= \hat{\mathcal{L}}\ \omega(T_js\ X_1,\dots,T_js\ X_m) =$$

$$= \sum_i \omega\ (X_1,\dots \hat{\mathcal{L}}\, T_js\ X_i,\dots X_m)$$

ma $\hat{\mathcal{L}}\, T_js\ X_i$ è la contrazione del tensore $D\mathcal{L} \circ js$ con il vettore

$\Theta(T_js\ X_i)(x) = \Theta\big|_{j_xs}\ d\ j\ s(x)X_i(x) = 0$ per ogni $x \in M$.

3.8. Come conseguenza della 3.7. si ha che se $s : M \to E$ è una sezione

$$I_A[s] = \int_A (js)^* \text{(H)}$$

Quindi una sezione $s$ è estremale se e solo se

$$\frac{d}{dt} \int_A (js_t)^* \text{(H)} = 0$$

per ogni famiglia $s_t$ tale che $s_\circ = s$ su $A$ e $s_t = s$ su $\partial A$.

Calcolando la derivata abbiamo

$$\int_A \frac{d}{dt} (js_t)^* \text{(H)} = \int_A L_{\frac{d}{dt}(js_t)|_{t=0}} \text{(H)} =$$

$$= \int_A i_{\frac{d}{dt}(js_t)|t=0}\ d\,\text{(H)} + \int_{\partial A} i_{\frac{d}{dt}(js_t)|_{t=0}} \text{(H)} =$$

$$= \int_A i_{\frac{d}{dt}(js_t)|t=0} \text{(H)}$$

Ricordando quanto detto in 2.5 e per l'arbitrarietà di $s_t$ si ha:

Proposizione: Una sezione $s$ è estremale se e solo se per ogni sezione

$$\nu \in \Gamma(s^* vTE) \quad \text{si ha ,} \quad [3], :$$

$$i_{j\nu}\, d\, H \Big|_{js(A)} = 0.$$

3.9. Sia ora $u : M \to J'(E)$ una sezione. Definiamo un nuovo funzionale:

$$I_A[u] = \int_A u^* H$$

e andiamo a cercare le sezioni estremali di $I_A$ tra tutte le sezioni di $J'(E)$ su $A$ che assumono un determinato valore su $\partial A$.

Come abbiamo visto per $I_A[s]$ , ciò significa

$$\frac{d}{dt} I_A[u_t] \Big|_{t=0} = 0 \qquad \text{per ogni famiglia di sezioni } u_t \text{ di}$$

$J'(E)$ su $M$ tale che $u_o = u$ su $A$ e $u_t = u$ su $\partial A$ .

Ripetendo i calcoli di 3.8 abbiamo immediatamente l'equazione a cui deve soddisfare una sezione critica $u$.

$u$ è una sezione critica di $I_A$ se e solo se per ogni campo jp-verticale $\xi(\xi \in \Gamma(v_M\, T\, J'(E)))$ si ha

$$u^*(i_\xi\, d\, H) = 0 \, .$$

3.10. Confrontando i problemi posti in 3.8 e 3.9 è naturale chiedersi quale sia la differenza tra loro.

In 3.9, $u$ è una generica sezione di $J'(E)$, e non necessariamente un rilevamento canonico di una sezione di $E$.

Poniamo la domanda: sotto quali condizioni una soluzione di 3.9 è soluzione di 3.8?

Cioé, sotto quali condizioni una soluzione di 3.9 verifica l'equazione $j(\pi \circ u) = u$ ?

Teorema [1]: Se la trasformata di Legendre $D\mathcal{L} : J'(E) \to p^* TM \otimes_E (vTE)^*$ è un'immersione, allora l'equazione $u^*(i_\xi d \textcircled{H}) = 0$ per ogni campo $\xi$ jp-verticale è equivalente alle condizioni $u = j(\pi \circ u)$ , $\mathcal{E}[\pi \circ u]\ \omega = 0$.

Dim. Da quanto si è visto in 3.8, basta far vedere che l'equazione in 3.9 implica, in questo caso, $u = j(\pi \circ u)$.

Per semplicità effettuiamo la dimostrazione utilizzando un sistema di coordinate adattato $(x^\mu, q^i, q^i_\mu)$.

Basta considerare i campi $\pi$-verticali che avranno espressione locale

$\xi = \xi^i_\mu \dfrac{\partial}{\partial q^i_\mu}$ : otteremo così

$$i_\xi\, d\textcircled{H} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^j_\eta\, \partial q^i_\mu}\, \xi^j_\eta (dq^i - q^i_\nu\, dx^\nu) \wedge \Omega_\mu$$

$$\Omega_\mu = (-1)^{\mu-1}\, dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^\mu} \wedge \dots \wedge dx^m$$

da cui

$$u^*(i_\xi d\textcircled{H}) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^j_\eta\, \partial q^i_\mu}\, \xi^j_\eta \left( \frac{\partial u^i}{\partial x^\nu} - u^i_\nu \right) dx^\nu \wedge \Omega_\mu =$$

$$= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^j_\eta\, \partial q^i_\mu}\, \xi^i_\eta \left( \frac{\partial u^i}{\partial x^\mu} - u^i_\mu \right) = 0$$

avendo posto $u = (x^\mu, u^i, u^i_\mu)$

dall'arbitrarietà di $\xi$ segue

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^j_\eta \, \partial q^i_\mu} \left( \frac{\partial u^i}{\partial x^\mu} - u^i_\mu \right) = 0$$

ma $D\mathcal{L}$ è un immersione quindi $\det\left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^j_\eta \, \partial q^i_\mu} \right) \neq 0$

$$\Longrightarrow \quad \frac{\partial u^i}{\partial x^\mu} = u^i_\mu \quad \text{cioé} \quad u = j(\pi \circ u) \ .$$