$$\frac{d}{dt} f \circ e_t(x)\Big|_{t=0} = \langle \dot{e}_\circ(x), (d_{E/M} f) \circ e_\circ(x) \rangle \qquad \text{per ogni} \quad x \in M.$$

1.7. Sia (E,p,M) un fibrato vettoriale di fibra tipo F ($\dim F = n$). Indichiamo con $J'(E)$ lo spazio dei jets del 1° ordine di sezioni E. E' noto [2] che esiste una struttura di fibrato affine $(J'(E),\pi,E)$ di $J'(E)$ su E.

Inoltre, indicata con jp la proiezione $jp = p\circ\pi$, $(J'(E),jp,M)$ è un fibrato vettoriale di base M e fibra tipo $F \times \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n,F)$.

Inoltre il rilevamento canonico di una sezione $s \to js$ è un operatore differenziale tra le sezioni di (E,p,M) e le sezioni di $(J^1(E),jp,M)$ (vedi [2], corollario 11, pag. 12).

2. Problema variazionale e operatore di Eulero-Lagrange.

2.0. Definiamo qui un problema variazionale. L'ambiente naturale per un simile problema è lo spazio dei jets di un fibrato. Per tutto ciò che riguarda definizioni e proprietà fondamentali degli spazi di jets si veda [2].

2.1. Definizione.

Si dirà problema variazionale a bordo fisso (P.V.B.F.) il seguente insieme di dati

i) un fibrato (E,p,M) su una varietà M, orientata tramite la m-forma ω

ii) Una sottovarietà compatta di dimensione massima A, con bordo

iii) un'applicazione $\sigma : \partial A \to E$ tale che $p \circ \sigma = id_{\partial A}$ e prolungabile a una sezione $s : M \to E$

iv) una funzione $\mathcal{L}: J'(E) \to \mathbb{R}$ dallo spazio dei jets del prim'ordine di E in $\mathbb{R}$, detta lagrangiana.

e dalla richiesta

v) trovare una sezione $\bar{s}$ di E che soddisfi a $\bar{s}_{|\partial A} = \sigma$ e che renda minimo il funzionale

$$I_A[s] = \int_A (js)^* \mathcal{L}\omega$$

rispetto alle sezioni s che soddisfano $s_{|\partial A} = \sigma$.

(con js si indica il rilevamento canonico di s).

2.2. Condizione necessaria affinché una sezione s realizzi un minimo del funzionale I_A è che:

per ogni famiglia ad un parametro s_t di sezioni di E tali che $s_\circ = s$ su A e $s_t = s$ su ∂A sia

$$\frac{d}{dt} I_A [s_t]\Big|_{t=0} = 0$$

ogni sezione che soddisfa questa condizione si dice un'estremale. Vogliamo indagare sulle condizioni a cui deve soddisfare una sezione estremale.

2.3. Sia s_t una famiglia ad un parametro di sezioni che soddisfa alle condizioni in 2.2.

Chiameremo $\dot{s}_\circ$ l'applicazione da M in vTE che ad ogni punto $x \epsilon M$ fa corrispondere il vettore tangente alla curva sulla fibra $p^{-1}(x)$

$$t \mapsto s_t(x)$$

nel punto $t = 0$, cioé in $s(x)$.

$\dot{s}_\circ : M \to vTE$ è una sezione su M, in particolare $\dot{s}_\circ$ realizza una sezione del fibrato immagine reciproca su M di vTE tramite s

$$\dot{s}_o : M \to s^* vTE.$$

Inoltre la condizione $s_t = s$ su ∂A implica che $\dot{s}_o = 0$ su ∂A.

D'altra parte se ν è un campo di vettori di $s^* vTE$ è possibile costruire una famiglia (una classe di famiglie) ad un parametro di sezioni per cui $\nu = \dot{s}_o$

2.4. Calcoliamo adesso la derivata in 2.2.

$$\frac{d}{dt} I_A[s_t] \Big|_{t=0} = \int_A \frac{d}{dt} \mathscr{L} \circ js_t \Big|_{t=0} \omega =$$

$$= \int_A < \frac{d}{dt} js_t \Big|_{t=0} , (d_{JE_{/M}} \mathscr{L}) \circ js_o > \omega$$

in virtù della 1.6.

e quindi la condizione di estremalità fa intervenire il campo vettoriale $\frac{d}{dt} js_t \Big|_{t=0}$, che, in analogia a quanto detto nel precendente 2.3., è una sezione su M del fibrato vettoriale $js^* v_M TJ^1(E)$, intendendo con $v_M TJ'(E)$ i vettori verticali rispetto alla proiezione jp.

2.5. L'ultimo passo per la costruzione dell'operatore di Eulero-Lagrange è far vedere il legame tra $\frac{d}{dt} js_t \Big|_{t=o}$ e $\dot{s}_o$

$\dot{s}_o$ è una sezione di $s^* vTE$, possiamo rilevarla canonicamente una sezione $j\dot{s}_o$ di $J^1(s^* vTE)$.

D'altra parte i fibrati vettoriali su M $J^1(s^* vTE)$ e $js^*(v_M TJ'(E))$ sono canonicamente isomorfi tramite l'applicazione che manda

$$\frac{d}{dt} js_t \Big|_{t=0} \to j(\frac{d}{dt} s_t \Big|_{t=0})$$

(la verifica in termini di coordinate locali è un semplice scambio nell'ordine di derivazione)
quindi possiamo scrivere la condizione di estremalità

$$\int_A < j\dot{s}_\circ , d_{JE/M} \mathcal{L} \circ js_\circ > \omega = 0$$

Ciò equivale a dire:
una sezione s è un estremale per il funzionale I_A se e solo se per ogni sezione ν di $s^* vTE$ a supporto compatto in A si ha

$$\int_A < j\nu , d_{JE/M} \mathcal{L} \circ js > \omega = 0$$

2.6. L'operatore $\nu \mapsto <j\nu , d_{JE/M} \mathcal{L} \circ js >$ è composto da un operatore differenziale (il rilevamento canonico j , vedi 1.7) e un operatore lineare. E' quindi un operatore differenziale $\mathcal{P}[s]$ a valori reali.
Per quanto è stato detto in 1.4., esiste allora un operatore differenziale

$\varepsilon[s] : \Gamma(\Lambda^m T^* M) \to \Gamma((s^* vTE)^* \otimes \Lambda^m T^* E)$

tale che

$$\int_A \mathcal{P}[s] \; \nu \; \omega = \int < \nu , \mathcal{E}[s]\omega >$$

per ogni sezione ν di $s^* vTE$ a suporto compatto in A .

La condizione di estremalità è quindi

$$\int_A < \nu, \mathcal{E}[s]\omega > = 0 \qquad \forall \; \nu \in \Gamma(s^* vTE) \quad \mathrm{supp}\, \nu \subset A$$

Per la linearità rispetto a ν e l'arbitrarietà di ν questo equivale a

$$\mathcal{E}[s] \; \omega = 0 \; .$$

Siamo così arrivati a una equazione differenziale che caratterizza le sezioni estremali.

L'operatore $\mathcal{E}$ prende il nome di operatore di Eulero-Lagrange e l'equazione $\mathcal{E}[s]\omega = 0$ è la versione intrinseca del classico sistema di equazioni di Lagrange per l'estremali.

In un sistema di coordinate adattato, supposto $\omega = dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^m$ avremo

$$d_{JE/M}\mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i}(js)d_{JE/M}q^i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i_\mu}(js)d_{JE/M}q^i_\mu$$

da cui

$$\mathcal{T}[s]\nu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i}(js)\nu^i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i_\mu}(js)\frac{\partial}{\partial x^\mu}\nu^i$$

essendo $\nu = \nu^i \frac{\partial}{\partial q^i}(s)$

ne segue

$$< \nu, \mathcal{E}[s]\,\omega > = \nu^i \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i}(js) - \frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i_\mu}(js)\right) dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^m$$

e infine

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i}\left(x^n, s^j, \frac{\partial s^j}{\partial x^n}\right) = \frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i_\mu}\left(x^n, s^j, \frac{\partial s^j}{\partial x^n}\right)$$

3. La forma di Poincaré-Cartan.

3.1. Proposizione: Esiste una forma canonica θ su $J'(E)$ a valori nel modulo delle sezioni di $\pi^* vTE$.

Dimostrazione

Sia $\bar{v} \in T_{j_x s}(J^1(E))$ un vettore dello spazio tangente a $J'(E)$ in $j_x s$

$$w = d\pi_{j_x s}(\bar{v}) - d\,s_x(djp_{j_x s}\bar{v}) \text{ è un vettore di } T_{s(x)}E$$

ovviamente $dp_{s(x)}(w) = 0$ quindi w è un vettore verticale di $T_{s(x)}E$.