$$\int_t^x \lambda(\xi)d\xi \leq \int_0^{x_o} \lambda(\xi)d\xi \leq \frac{x_o}{|a_2|}\{|a_1| + A\, x_o + R\, B\, x_o^2\}\ .$$

Posto $K = \frac{x_o}{|a_2|}\{|a_1| + A\, x_o + R\, B\, x_o^2\}$, la precedente disuguaglianza diventa $\int_t^x \lambda(\xi)d\xi \leq K$, e tenuto conto della (8), si ha

$$|z_2(x)-\bar{z}_2(x)| \leq \{|u_1-\bar{u}_1| + \int_0^x \frac{1}{|a_2|}\Big[|u_o-\bar{u}_o|\cdot|F(x,t)| + |\bar{z}_1(t)|\,|\psi(t)-\bar{\psi}(t)|\Big]dt\}\cdot \exp K.$$

Da questa disuguaglianza e dalla prima delle (7) consegue la tesi del teorema.

3. TEOREMA DI ESISTENZA PER IL PROBLEMA (1), (2).

III) *Se esiste* $R > 0$ *tale che, posto*

$$H = \frac{1}{|a_2|}\{R\int_0^{x_o}|\psi(t)|dt + |a_1|\cdot R\cdot x_o + R^2\cdot\frac{x_o^2}{2}\int_0^1|\phi(s)|ds\} + |u_1|$$

si abbia:

$$(9)\qquad \begin{cases} x_o\cdot R + |u_o| \leq R \\ H \leq R \end{cases}$$

allora il problema (1),(2), *ha soluzione in* $C^2([0,x_o])$.

Sia $||z||$ la norma di z nello spazio di Banach $C^\circ([0,x_o],R^2)$ (1). In tale spazio consideriamo l'insieme

(1) Esplicitamente $||z|| = \max\{||z_1||,||z_2||\}$ con $||z_1|| = \max\limits_{x\in[0,x_o]}|z_1(x)|$ e $||z_2|| = \max\limits_{x\in[0,x_o]}|z_2(x)|$

$$S = \{z = (z_1,z_2) \ni z_1(0) = u_\circ, z_2(0) = u_1, \ ||z|| \leq R' \}.$$

Tale insieme è chiuso, limitato, convesso.

Consideriamo la trasformazione

$$T : z \in C^\circ([0,x_\circ]) \to T\,z = v$$

con $v = (v_1,v_2)$ e

$$(10)\quad \begin{cases} v_1(x) = \displaystyle\int_0^x z_2(t)dt + u_\circ \\ v_2(x) = -\dfrac{1}{a_2}\{\displaystyle\int_0^x \psi(t)z_1(t)dt + a_1\int_0^x z_2(t)dt + \int_0^x z_1(\xi)d\xi \int_0^\xi \phi(\tfrac{t}{\xi})\, z_1(t)dt\} + u_1 . \end{cases}$$

Dimostriamo che T trasforma S in sé, è continua e compatta. Da

$$||v_2|| \leq \frac{1}{|a_2|}\{R\int_0^{x_\circ}|\psi(t)|dt + |a_1|R\,x_\circ + R^2\,\frac{x_\circ^2}{2}\int_0^1 |\phi(s)|ds\} + |u_1| = H \leq R,$$

$$||v_1|| \leq \int_0^x ||z_2||dt + |u_\circ| \leq \int_0^{x_\circ} R\,dt + |u_\circ| = R\,x_\circ + |u_\circ| \leq R,$$

$v_1(0) = u_\circ$ e $v_2(0) = u_1$,

consegue che $v = (v_1,v_2) \in S$.

Per dimostrare la continuità della T, basta osservare che, posto $Tz = v$, $T\bar{z} = \bar{v}$, con il solito significato per $v,\bar{v},z,\bar{z}$, si ha

$$\begin{cases} v_1(x) - \bar{v}_1(x) = \displaystyle\int_0^x (z_2(t)-\bar{z}_2(t))dt \\ v_2(x)-\bar{v}_2(x) = -\dfrac{1}{a_2}\{\displaystyle\int_0^x \psi(t)\left[z_1(t)-\bar{z}_1(t)\right]dt + a_1\int_0^x \left[z_2(t)-\bar{z}_2(t)\right]dt + \\ \quad + \displaystyle\int_0^x \left[z_1(\xi)-\bar{z}_1(\xi)\right]d\xi \int_0^\xi z_1(t)\phi(\tfrac{t}{\xi})dt + \int_0^x \bar{z}_1(\xi)d\xi\int_0^\xi \phi(\tfrac{t}{\xi})\left[z_1(t)-\bar{z}_1(t)\right]dt. \end{cases}$$

Dimostriamo infine che T è compatta.

A tal fine sia U un insieme di funzioni $z(x)$ equilimitate, ossia tali che

$$||z|| \leq L.$$

Posto al solito $Tz = v = (v_1, v_2)$ si ha dalle (10)

$$||v_1|| \leq L \cdot x_0 + |u_0|$$

$$||v_2|| \leq \frac{1}{|a_2|} \{L \cdot A + |a_1| \cdot L \cdot x_0 + L^2 \cdot \frac{x_0^2}{2} \cdot B\} + |u_1| \cdot$$

Pertanto $T\,U$ è un insieme di funzioni equilimitate.

Si ha inoltre:

$$\left|v_1(x+\Delta x) - v_1(x)\right| = \left|\int_x^{x+\Delta x} z_2(t)dt\right| \leq L \cdot |\Delta x|$$

$$\left|v_2(x+\Delta x) - v_2(x)\right| \leq \frac{1}{|a_2|} \{|a_1| \cdot L \cdot |\Delta x| + A \cdot L \cdot |\Delta x| + \int_x^{x+|\Delta x|} L \cdot |z_1(\xi)| d\xi \int_0^1 |\phi(s)| \cdot \xi \cdot ds\} \leq$$

$$\leq \frac{L}{|a_2|} \{|a_1| + A + \frac{L \cdot A \cdot 3x_0}{2}\} \cdot |\Delta x| .$$

Pertanto $T\,U$ è un insieme di funzioni equicontinue.

In definitiva T trasforma insiemi di funzioni equilimitate in insiemi di funzioni equicontinue ed equilimitate; quindi T è compatta.

Per il teorema di Schauder esiste in S un punto unito per la T, ossia esiste $z \in S$, tale che

$$Tz = z.$$

Tale funzione $z(x) = (z_1(x), z_2(x))$ risolve il sistema(5) e, per quanto osservato precedentemente, la funzione $u(x) = z_1(x)$ è soluzione in $C^2([0,x_0])$ del problema (1),(2).