0. Il problema del rimbalzo unidimensionale.

Sia $\bar{\Omega} = [0,T]$, $f \in L^1(\bar{\Omega};R)$.

Definizione.

Diremo che u, lipschitziana in $\bar{\Omega}$, è soluzione del pdr (problema del rimbalzo) se soddisfa le seguenti condizioni:

(i) $u \leq 0$ in $\bar{\Omega}$;

(ii) $\int_{\bar{\Omega}} [\ddot{u}(t) - f(t)]\, \phi(t)\, dt \leq 0$ per ogni $\phi \in C_0^\infty(\bar{\Omega};[0,+\infty[)$

(iii) per $u < 0$

$\ddot{u} - f = 0$ nel senso delle distribuzioni;

(iv) per ogni $t \in \Omega$ esistono $\dot{u}^+(t)$ e $\dot{u}^-(t)$; esistono $\dot{u}^+(0)$, $\dot{u}^-(T)$ e si ha:

$$\frac{1}{2}\left[\dot{u}^\pm(t)\right]^2 = \frac{1}{2}\left[\dot{u}^+(0)\right]^2 + \int_0^t f(\eta)\,\dot{u}(\eta)d\eta \qquad \text{per } t \in \bar{\Omega}$$

(conservazione dell'energia).

Osservazione I - L'esistenza per ogni $t \in \Omega$ della derivata destra $\dot{u}^+(t)$ e sinistra $\dot{u}^-(t)$ segue dalla (ii), osservato che la funzione

$$w(t) = u(t) - \int_0^t \left(\int_0^\eta f(\xi)d\xi\right)d\eta \qquad \text{è concava e}$$

$$F(t) = \int_0^t \left(\int_0^\eta f(\xi)d\xi\right)d\eta \qquad \text{è derivabile.}$$

Diremo condizioni iniziali ammissibili per il pdr condizioni del tipo

$$u(t_0) = s \quad , \quad \dot{u}^+(t_0) = b \quad ,$$

con $0 \leq t_0 < T$, $s < 0$, $b \in R$ oppure

$$0 \leq t_\circ < T , \qquad s = 0 , \quad b \leq 0.$$

§ 1. Approssimazioni non convesse per il pdr unidimensionale e teorema di esistenza.

Sia (u_h) una successione di funzioni per cui si abbia

$$u_h \in C^1(\bar{\Omega};R) , \qquad \ddot{u}_h \in L^1(\bar{\Omega};R) \qquad e$$

$$\int_{\bar{\Omega}} \left[\ddot{u}_h(t)+\psi_h(u_h(t))\right]\phi(t)dt=\int_{\bar{\Omega}} f(t)\phi(t)dt \qquad \text{per ogni} \quad \phi\in C_\circ^\infty(\bar{\Omega};R).$$

Su f e ψ_h (termine di penalizzazione) facciamo le seguenti ipotesi:

(1) $\qquad f \in L^1(\bar{\Omega};R)$;

(2) $\qquad \psi_h \in C^\circ(R;R)$

$$\psi_h(\xi)\begin{cases} = 0 & \text{per} \quad \xi \leq 0 \\ > 0 & \text{per} \quad \xi > 0 \quad ; \end{cases}$$

$(3)_1$ comunque si fissino ξ_1,ξ_2 (con $0<\xi_1<\xi_2$)

$$\lim_{h\to+\infty} \psi_h(\xi) = + \infty \quad , \qquad \xi_1\leq\xi\leq\xi_2;$$

$(3)_2$
$$\lim_{\substack{\xi\to 0^+ \\ h\to+\infty}} \frac{\psi_h(\xi)}{\int_0^\xi \psi_h(\eta)d\eta} = + \infty. \quad (^1)$$

(^{1}) Per esempio si può prendere

$\psi_h(\xi) = h(\xi^3+|\xi|^3)$.

Altri esempi (comprendenti ψ_h non convesse) verranno dati alla fine di questo paragrafo.

Sussiste il seguente

Lemma 1 - Comunque si fissi una condizione iniziale (s,b) ammissibile per il pdr, ogni successione (u_h) di soluzioni dei problemi

$$(P_h)\quad \begin{cases} \int_{\bar\Omega}\left[\ddot u_h(t)+\psi_h(u_h(t))\right]\phi(t)dt=\int_{\bar\Omega} f(t)\phi(t)dt & \text{per ogni } \phi\in C_o^\infty(\bar\Omega;R) \\ u_h(0) = s \\ \dot u_h^+(0) = b \end{cases}$$

verifica le seguenti condizioni

[A] (u_h) è equilipschitziana (quindi equicontinua) ed equilimitata;

[B] posto

$$\alpha_h(u_h(t)) = \int_0^t \psi_h(u_h(\eta))\dot u_h(\eta)d\eta \quad ,$$

esiste $c > 0$ per cui

$$0 \leq \alpha_h(u_h(t)) \leq c \qquad \text{per ogni } h\in N \text{ e } t\in\bar\Omega \ ;$$

[C] per ogni $t \in \bar\Omega$ risulta

$$\max\lim_{h\to+\infty} u_h(t) \leq 0 \ .$$

Dimostrazione.

[A] Da (P_h) si ottiene l'identità dell'energia

$$(\dot u_h(t)\ddot u_h(t)+\dot u_h(t)\psi_h(u_h(t)) = \dot u_h(t)f(t) \qquad \text{q.o. in } \bar\Omega \ ;$$

$$\frac{1}{2}\ \frac{d}{dt}\ \dot u_h^2(t)+\dot u_h(t)\psi_h(u_h(t))= \dot u_h(t)f(t) \qquad \text{q.o. in } \bar\Omega \text{ e quindi)}$$

$$(4)\quad \frac{1}{2}\,\dot{u}_h^2(t) = \frac{1}{2}\,b^2-\alpha_h(u_h(t))+\int_0^t \dot{u}_h(\eta)f(\eta)d\eta \qquad \text{per} \quad t\in\bar{\Omega}\ .$$

Allora

$$0 \leq \frac{1}{2}\,\dot{u}_h^2(t) \leq \frac{1}{2}\,b^2+\int_0^t |f(\eta)||\dot{u}_h(\eta)|d\eta \leq \frac{1}{2}\,b^2+||f||_{L^1(\bar{\Omega};R)}\cdot||\dot{u}_h||_{C^\circ(\bar{\Omega};R)}$$

per ogni $t\in\bar{\Omega}$ e per ogni $h\in N$.

Quindi

$$||\dot{u}_h||^2_{C^\circ(\bar{\Omega};R)} \leq b^2+2||f||_{L^1(\bar{\Omega};R)}\cdot||\dot{u}_h||_{C^\circ(\bar{\Omega};R)} \qquad \text{per ogni} \quad h\in N, \text{pertanto}$$

$$(5)\quad ||\dot{u}_h||_{C^\circ(\bar{\Omega};R)} \leq \text{costante} \quad (\text{indipendente da} \ \ h).$$

Da (5) segue [A] .

[B] Segue da (4) e (5), tenuto conto dell'ipotesi su f.

[C] Supponiamo che per $\bar{t} \in \bar{\Omega}$ si abbia

$$\max\lim_{h\to+\infty} u_h(\bar{t}) > \sigma > 0;$$

ne segue che per una opportuna estratta di $(u_h(\bar{t}))$, $(u_{h(k)}(\bar{t}))$, riesce

$$u_{h(k)}(\bar{t}) > \sigma > 0\ .$$

Allora
$$\int_{\sigma/2}^{\sigma} \psi_{h(k)}(\xi)d\xi \leq \int_s^{u_{h(k)}(\bar{t})} \psi_{h(k)}(\xi)d\xi = \alpha_{h(k)}(u_{h(k)}(\bar{t})) \leq c,$$

contro l'ipotesi $(3)_1$. ∎

<u>Teorema</u> 1 - <u>Se</u> (u_h) (<u>con</u> u_h <u>soluzione del problema</u> (P_h)) <u>converge uniformemente in</u> $\bar{\Omega}$ <u>ad una funzione</u> u, <u>allora</u> u <u>è soluzione del pdr</u>.

La dimostrazione si articola in diversi punti. Intanto u è lipschitziana in $\bar{\Omega}$ (per [A]) ed è non positiva (per [C]).

Proviamo (ii).

Sia $\phi \in C_o^\infty(\bar{\Omega};[o,+\infty[)$; per ogni $h \in N$ si ha

$$\int_{\bar{\Omega}} [\ddot{u}_h(t)-f(t)]\phi(t)dt = -\int_{\bar{\Omega}} \psi_h(u_h(t))\phi(t)dt \leq 0,$$

quindi

$$\int_{\bar{\Omega}} u_h(t)\ddot{\phi}(t)dt - \int_{\bar{\Omega}} f(t)\phi(t)dt \leq 0 \quad ;$$

allora, per $h \to +\infty$, riesce

$$\int_{\bar{\Omega}} u(t)\ddot{\phi}(t)dt - \int_{\bar{\Omega}} f(t)\phi(t)dt \leq 0, \quad \text{cioé} \quad \int_{\bar{\Omega}} [\ddot{u}(t)-f(t)]\phi(t)dt \leq 0.$$

Dimostriamo, ora, la condizione (iii).

Per $u(t) < 0$, $u_h(t)$ è non positiva definitivamente; allora, da (P_h), $\ddot{u}_h - f = 0$ (definitivamente) nel senso delle distribuzioni e quindi, per l'ipotesi, $\ddot{u} - f = 0$ nel senso delle distribuzioni.

<u>Osservazione</u> II - Per $u(t) < 0$ si ha q.o.

$$\ddot{u}_h(t) = f(t) \quad \text{definitivamente,}$$

quindi la successione $(\dot{u}_h)$ è equicontinua; poiché $(\dot{u}_h)$ è anche equilimitata (cfr. (5)), la successione $(\dot{u}_h)$ ha una estratta che converge uniformemente.

E' così provata l'esistenza di $\dot{u}$ per $u(t) < 0$ e la sua continuità. Resta da provare la conservazione dell'energia.

A tale scopo premettiamo alcune proposizioni.

[D] Esiste una opportuna estratta di (u_h), indicata ancora con (u_h), ed esiste una funzione non negativa , uniformemente continua, Φ per cui, posto $\Phi_h(t) = \frac{1}{2}\dot{u}_h^2(t) + \alpha_h(u_h(t))$, risulta $\lim_{h\to+\infty} \Phi_h(t) = \Phi(t)$ uniformemente in $\bar{\Omega}$.

Dall'identità dell'energia (4) e dalla (5), segue che $||\Phi_h||_{C^\circ(\bar{\Omega};R)} \lesssim$ costante; inoltre da

$$\dot{\Phi}_h(t) = \dot{u}_h(t)\ddot{u}_h(t)+\psi_h(u_h(t))\dot{u}_h(t) = f(t)\dot{u}_h(t)$$

segue che (Φ_h) è equicontinua.

La tesi segue dal teorema di Ascoli-Arzelà.

Osserviamo che per $u(t) < 0$ risulta

$$\Phi(t) = \frac{1}{2}\dot{u}^2(t) .$$

[E] Sia $\tau\in\Omega$ zero isolato di u, allora

$$\dot{u}^+(\tau) = -\dot{u}^-(\tau) .$$

Infatti, essendo

$$\dot{u}^-(\tau) = \lim_{t\to\tau^-}\dot{u}(t)[=\lambda_1] \qquad \text{e}$$

$$\dot{u}^+(\tau) = \lim_{t\to\tau^+}\dot{u}(t)[=\lambda_2] \quad , \qquad \text{per } t_1<\tau<t_2 \text{ si ha}$$

$$|\lambda_1^2 - \lambda_2^2| \lesssim |\lambda_1^2 -\dot{u}^2(t_1)|+|\dot{u}^2(t_1)-\dot{u}^2(t_2)| + |\dot{u}^2(t_2)-\lambda_2^2|$$

e per $t_1 \to \tau^-$ e $t_2 \to \tau^+$, dalla continuità di Φ, si ha

$$\lambda_1^2 = \lambda_2^2$$

Ne segue che $|\lambda_1| = |\lambda_2|$.

E' facile riconoscere (tenuto conto del fatto che u è non positiva) che non può essere $\lambda_1 = \lambda_2$ se non per $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

<u>Osservazione</u> III - <u>Nelle ipotesi del teorema 1</u>, <u>per ogni</u> $\tau\in\Omega$ <u>si ha</u>

$$(6)\quad \dot u^-(\tau) \geq \max_{h\to+\infty}\lim \dot u_h(\tau) \geq \min_{h\to+\infty}\lim \dot u_h(\tau) \geq \dot u^+(\tau)\ .$$

Dim.

Sia $t > \tau$

da $\ddot u_h(t) = f(t) - \psi_h(u_h(t))$ q.o. si ha

$$\dot u_h(t)-\dot u_h(\tau) = \int_\tau^t f(\eta)d\eta-\int_\tau^t \psi_h(u_h(\eta))d\eta \leq \int_\tau^t f(\eta))d\eta;$$

quindi

$$u_h(t)-u_h(\tau) \leq (t-\tau)\dot u_h(\tau) + \int_\tau^t (\int_\tau^\eta f(\xi)d\xi)d\eta\ .$$

Pertanto

$$u(t)-u(\tau) \leq (t-\tau) \min_{h\to+\infty}\lim \dot u_h(\tau)+ \int_\tau^t(\int_\tau^\eta f(\xi)d\xi)d\eta$$

da cui

$$\frac{u(t)-u(\tau)}{t-\tau} \leq \min_{h\to+\infty}\lim \dot u_h(\tau) + \frac{1}{t-\tau}\int_\tau^t (\int_\tau^\eta f(\xi)d\xi)d\eta;$$

per $t \to \tau^+$ si ha

$$(7)\quad \dot u^+(\tau) \leq \min_{h\to+\infty}\lim \dot u_h(\tau)\ .$$

Sia ora $t < \tau$; con procedimento analogo al precedente si ottiene

$$(8)\quad \dot u^-(\tau) \geq \max_{h\to+\infty}\lim \dot u_h(\tau)$$

Da (7) e (8) segue la (6).

[F] Se τ è uno zero interno agli zeri di u, risulta $\dot{u}(\tau) = \ddot{u}(\tau) = 0$ e $\lim_{h\to+\infty} \dot{u}_h(\tau) = \dot{u}(\tau)$.

(cfr. osservazione III).

[G] Se $u(\tau) = 0$ ed esiste un intorno I di τ per cui:

$$u(t) < 0 \quad \text{per} \quad t < \tau \qquad (\text{per } t > \tau),\ t\in I$$
$$u(t) = 0 \quad \text{per} \quad t \geq \tau \qquad (\text{per } t \leq \tau),\ t\in I,$$

allora $\dot{u}(\tau) = 0$

Dim. Intanto nelle ipotesi di [G] è $\Phi(\tau) = 0$.

Se ciò non fosse vero, sarebbe in un opportuno intorno $I°(\subset I)$ $\Phi(t) > \sigma > 0$. Detto $I^\circ_+ = \{t\in I° | t>\tau\}$, si avrebbe $u(t) = \dot{u}(t) = 0$ ed anche, per l'osservazione III, $\lim_{h\to+\infty} \dot{u}_h(t) = 0$ in I°_+.

Allora per ogni $t\in I^\circ_+$, risulta $\alpha_h(u_h(t))>\sigma$ definitivamente e, per l'ipotesi $(3)_2$, $\lim_{h\to+\infty} \psi_h(u_h(t)) = +\infty$.

Inoltre è facile provare che esiste una costante $c° > 0$ (indipendente da h) per cui

$$0 \leq \int_{t_1}^{t_2} \psi_h(u_h(\eta))d\eta \leq c° \qquad \text{per ogni} \quad t_1,t_2 \in \bar{\Omega}.$$

Sia, ora, m il più piccolo intero positivo maggiore di $\dfrac{2\,c°}{t_2-t_1}$, essendo $[t_1,t_2] \subset I^\circ_+$.

Consideriamo la successione di funzioni, misurabili e limitate,

$$\{\psi_h(u_h(t))\}^m = \begin{cases} \psi_h(u_h(t)) & \text{se} \quad \psi_h(u_h(t)) \leq m \\ m & \text{se} \quad \psi_h(u_h(t)) > m \end{cases} ;$$

tale successione converge puntualmente alla funzione costante m.

Riesce inoltre

$$\int_{t_1}^{t_2} \{\psi_h(u_h(t))\}^m dt \leq \int_{t_1}^{t_2} \psi_h(u_h(t)dt \leq c^\circ \qquad \text{per ogni} \quad h\in N.$$

Per il Lemma di Fatou si ha $m(t_2-t_1) \leq c^\circ$; quindi un assurdo.

Ora, da $\phi(\tau) = 0$ segue che $\lim_{t\to\tau^-} \dot{u}^2(t) = 0$ e perciò $\lim_{t\to\tau^-} \dot{u}(t) = 0$

Ne deduciamo così l'esistenza di $\dot{u}^-(\tau) = 0 = \dot{u}^+(\tau)$.

Osserviamo esplicitamente che è anche $\phi(t) = 0$ per $t\in I$, $t > \tau$.

[H] Se $u(\tau) = 0$ e τ è d'accumulazione di zeri di u, allora $\dot{u}(\tau) = 0$.

In questo caso esiste una successione di punti (ξ_h) per cui

$u(\xi_h) < 0$, $\dot{u}(\xi_h) = 0$ e $\lim_{h\to+\infty} \xi_h = \tau$.

Ne segue che $\lim_{t\to\tau} \phi(t) = 0 = \lim_{t\to\tau}[\dot{u}^-(t)]^2 = \lim_{t\to\tau}[\dot{u}^+(t)]^2$.

Osservazione IV.

Da quanto provato in [D]-[H] segue che:

$$\Phi(t) = \frac{1}{2}[\dot{u}^\pm(t)]^2 \qquad \text{in} \qquad \bar{\Omega} ,$$

e

$\lim_{h\to+\infty} \dot{u}_h = \dot{u}$ q.o. in $\bar{\Omega}$ (($\dot{u}_h$) non convergendo, eventualmente, negli zeri isolati di u).

Dall'osservazione precedente segue la condizione (iv). Infatti,per il Teorema di Lebesgue, dalla (4)(passando al limite, per $h \to +\infty$, per una opportuna estratta, cfr. [D]) si ottiene

$$\frac{1}{2}[\dot{u}^{\pm}(t)]^2 = \frac{1}{2} b^2 + \int_0^t f(\eta)\dot{u}(\eta)d\eta \qquad \text{per } t \in \bar{\Omega} \quad .$$

Da quanto provato segue il teorema 1. ∎

Osservazione V -

Da quanto dimostrato risulta che se sopprimiamo l'ipotesi $(3)_2$, la (iv) può essere formulata solo in questi termini:

"esiste una funzione $\Phi(t) \geq 0$, uniformemente continua, per cui

$$\frac{1}{2} b^2 + \int_0^t f(\eta)\dot{u}(\eta)d\eta = \Phi(t) \qquad \text{con}$$

$$\Phi(t) = \frac{1}{2}\dot{u}^2(t) \qquad \text{per } u(t) < 0 \text{''.}$$

Corollario.

Nelle ipotesi poste, per ogni dato iniziale (s,b) ammissibile per il pdr esiste almeno una soluzione del pdr in $\bar{\Omega}$ con dati iniziali (s,b); essa è limite uniforme in $\bar{\Omega}$ di una successione (u_h) di soluzioni del problema (P_h).

Dim.

Per la [A] del Lemma 1, fissata una qualsiasi successione (u_h) (di soluzione di (P_h)) esiste una estratta uniformemente convergente in $\bar{\Omega}$ ad una funzione u, soluzione del pdr in $\bar{\Omega}$ (per il Teorema 1). ∎

<u>Osservazione</u> VI - Si riconosce facilmente che l'ipotesi $(3)_2$ può essere sostituita dalla seguente

$(3)_{2'}$ Esiste $\Theta_h(\eta)$, crescente in η, tale che

$$\Theta_h(\alpha_h(\xi)) \leq \psi_h(\xi) \quad \text{e per} \quad \eta > 0 \quad \lim_{h\to+\infty} \Theta_h(\eta) = +\infty .$$

Diamo alcuni esempi per la scelta dei termini di penalizzazione ψ_h verificanti $(3)_1$ e $(3)_2$.

1) Sia, per ogni $h \in N$,

$$\psi_h(\xi) = \begin{cases} 0 & \text{per} \quad \xi \leq 0 \\ h(\sum_{i=1}^{n} a_i \xi^i) & \text{per} \quad \xi > 0 \end{cases}$$

con $a_i > 0$, per ogni $i = 1,2,\ldots,n$.

2) Sia, per ogni $h \in N$,

$$\psi_h(\xi) = \begin{cases} 0 & \xi \leq 0 \\ h\,\xi^{1/2} & 0 < \xi < 1 \\ h\,\xi & 1 \leq \xi \end{cases} .$$

Illustriamo, infine, un caso per cui si verifica $(3)_1$ e $(3)_{2'}$.

3) Sia $v \in C^1(R;R)$ con $v(\xi) = 0$ per $\xi \leq 0$.

Supponiamo che $\lim_{\xi\to+\infty} v(\xi) = +\infty$ e $v(\xi) \leq \dot{v}(\xi)$ per ogni ξ.

Allora $\psi_h(\xi) = h\dot{v}(h\xi)$ verifica $(3)_1$ e la $(3)_{2'}$ con $\Theta_h(\eta) = h\eta$.

§ 2. Ulteriori proprietà delle soluzioni del pdr.

Nella ipotesi $f \in C^{\circ}(\bar{\Omega};R)$ per le soluzioni del pdr di cui al teorema 1, sussistono i seguenti fatti:

[I] Se per $\tau \in \Omega$ si ha $u(\tau) = \dot{u}(\tau) = 0$ ed $f(\tau)<0$, allora τ è è uno zero isolato di u ed inoltre $\ddot{u}(\tau) = f(\tau)$.

Dim.

Per la continuità di f e l'ipotesi $f(\tau) < 0$ si ha che esistono $\eta < 0$, $\delta > 0$ tali che per ogni $h \in N$ e $t \in]\tau - \delta, \tau + \delta[$ si ha $\ddot{u}_h(t) \leq \ddot{u}_h(t) + \psi_h(u_h(t)) = f(t) < \eta < 0$; in definitiva, per $h \in N$ e

$t \in]\tau\,,\ \tau + \delta[$, $\ddot{u}_h(t) < \eta < 0$. Allora per $t \in]\tau,\tau+\delta[$, risulta

$$\dot{u}_h(t) - \dot{u}_h(\tau) < \eta\ (t-\tau) \qquad \text{e quindi}$$

$$u_h(t) - u_h(\tau) - (t-\tau)\dot{u}_h(\tau) < \eta\,\frac{(t-\tau)^2}{2}\,. \tag{9}$$

Essendo $\dot{u}(\tau) = 0$, è anche $\lim\limits_{h\to+\infty} \dot{u}_h(\tau) = 0$; pertanto da (9), per $h \to +\infty$, si ottiene

$$u(t) \leq \eta\,\frac{(t-\tau)^2}{2} < 0 \qquad \text{per} \qquad t \in]\tau,\tau+\delta[\,. \tag{10}$$

Analogamente si ha

$$u(t) \leq \eta\,\frac{(t-\tau)^2}{2} < 0 \qquad \text{per} \qquad t \in]\tau-\delta,\tau[\,. \tag{11}$$

Da (10) e (11) segue la tesi, tenendo anche conto della continuità di f.

[L] <u>Sia</u> $\tau \in \Omega$ <u>tale che</u> $u(\tau) = \dot{u}(\tau) = 0$;

(j) <u>Se</u> $f(\tau) > 0$ <u>allora</u> τ <u>è zero interno agli zeri di</u> u.

(jj) <u>Se</u> $f(\tau) = 0$ τ <u>può non essere zero isolato</u>.

<u>In ogni caso risulta</u> $\ddot{u}(\tau) = 0$

Dim.

(j) Non può esistere un intorno τ in cui $u(t) \neq 0$; in questo caso, si otterrebbe, per un opportuno intorno di τ, $u(t) > 0$.

In base a ciò, per provare quanto asserito, basta riconoscere che τ non può essere uno zero di accumulazione per zeri isolati di u. Se, allora, τ fosse di accumulazione per zeri isolati di u, esisterebbe una successione (ξ_h) con $\dot{u}(\xi_h) = 0$ e $\lim_{h\to+\infty} \xi_h = \tau$; siccome in un opportuno intorno di τ è $\ddot{u}(t) = f(t)$, ne segue che $f(\tau) = \ddot{u}(\tau) = \lim_{h\to+\infty} \frac{\dot{u}(\xi_h) - \dot{u}(\tau)}{\xi_h - \tau} = 0$.

Pertanto τ è zero interno agli zeri di u.

(jj) E' sufficiente provare che sono vere le seguenti asserzioni:

- <u>Se</u> τ <u>è minimo relativo per</u> f, <u>allora</u> τ <u>non è zero isolato per</u> u.

= <u>Se</u> τ <u>è massimo relativo proprio per</u> f, <u>allora</u> τ <u>è zero isolato per</u> u.

- Se lo fosse in un opportuno intorno J di τ, si avrebbe $\ddot{u}(t) = f(t) \geq 0$; integrando si ottiene $u(t) \geq 0$ in J.

= Per l'ipotesi su f, esiste un intorno J di τ, per cui

$$f(t) < 0 \quad \text{per} \quad t \in J \setminus \{\tau\}. \tag{12}$$

Se esistesse un intorno $J_1 \subseteq J$ in cui $u(t) = 0$, si otterrebbe, per [I], che tali punti sono zeri isolati di u. Ne segue che per provare l'asserzione basta provare che τ non è punto di accumulazione per zeri isolati. Se lo fosse, dovendo essere $\ddot{u}(t) = f(t)$ in un opportuno intorno di τ, si otterrebbe $f(t) \geq 0$ per qualche punto in J.

Si riconosce che, comunque, è $\ddot{u}(\tau) = 0$. ∎

§ 3. Problema dell'unicità. Esempio di non unicità.

Diamo un esempio di non unicità per il pdr unidimensionale con f di classe C^{∞}(2).

Per la costruzione è utile la seguente considerazione di facile verifica.

Sia $h \in C_0^{\infty}(R;[0,+\infty[)$, soddisfacente le condizioni

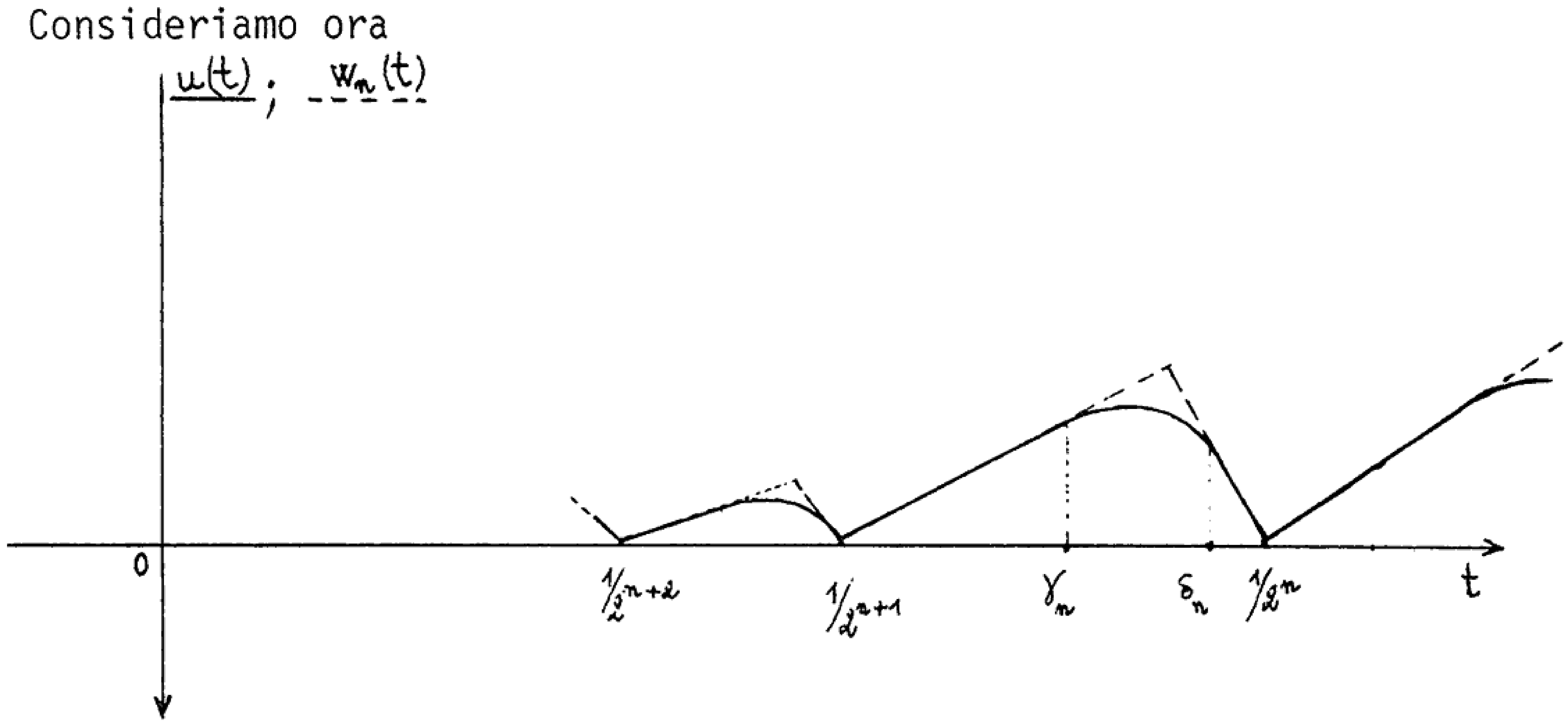
$$\int_R h(t)dt = 1 \quad \text{e} \quad \int_R t\cdot h(t)dt = 0 \ , \qquad \text{allora posto}$$

$$(h*v)(t) = \int_R v(t-y)h(y)dy, \qquad \text{si ha}$$

(a) $h*v$ è convessa se v è convessa ,

(b) $h*v = v$ se $v(t) = a\,t + b$.

Consideriamo ora



(2) Il fenomeno di non unicità ci è stato segnalato (oralmente) dal prof. L. Amerio.

$$W_n(t) = \max\{2^{-(n+1)^2}(2^{-(n+1)} - t);\ 2^{-n^2}(t-2^{-n})\} \quad \text{per } 2^{-(n+1)} \leq t \leq 2^{-n}.$$

Sia $h \in C_o^\infty(R;[0,+\infty[)$ con $h(t) = 0$ per $|t| \geq 1$, $\int_{-1}^{1} h(t)dt = 1$ e

$$\int_{-1}^{1} t \cdot h(t)dt = 0$$

Per ogni $n \in N$ poniamo $h_n(t) = \alpha_n h(\beta_n t)$ dove è

$0 < \beta_n \leq 5^{-1} \cdot 2^{-(n+1)} \cdot (1+2^{2n+1})^{-1}$ ed α_n tale che $\int_R h_n(t)dt = 1$.

Posto $u(t) = (h_n * W_n)(t)$ per $2^{-(n+1)} \leq t \leq 2^{-n}$, risulta $u(t) \leq 0$.

Inoltre esistono (γ_n), (δ_n) con $2^{-(n+1)} < \gamma_n < \delta_n < 2^{-n}$

per cui $2^{-(n+1)} \leq t \leq \gamma_n$ e $y \in \text{supp}\, h_n$: $W_n(t-y) = a_n(t-y) + b_n$,

$\delta_n \leq t \leq 2^{-n}$ e $y \in \text{supp}\, h_n$: $W_n(t-y) = a_n'(t-y) + b_n'$.

Ne segue, cfr. (b),

$$u(t) = W_n(t) \quad \text{per } 2^{-(n+1)} \leq t \leq \gamma_n \quad \text{o} \quad \delta_n \leq t \leq 2^{-n} .$$

Inoltre per la (a) $\ddot{u}(t) \geq 0$. E' altresì evidente che $u(0) = \dot{u}^+(0) = 0$. Posto, in $[0,1]$, $f(t) = \ddot{u}(t)$, f risulta traccia di una funzione di classe C^∞. Consideriamo il pdr in $\bar{\Omega} = [0,1]$ col dato f e condizione iniziale ammissibile $(0,0)$ nello zero.

E' evidente che la funzione $u(t)$ precedentemente costruita è soluzione di questo pdr con le condizioni iniziali assegnate. E' facile altresì provare che la funzione identicamente nulla è anche soluzione dello stesso pdr.

§ 4. Alcune condizioni sufficienti per l'unicità della soluzione del pdr.

Sussiste il seguente

Teorema 2. Se f è costante a tratti in $\bar{\Omega}$, allora il pdr ammette una unica soluzione in $\bar{\Omega}$ verificante un assegnato dato iniziale ammissibile (s,b).

Dim.

E' sufficiente provare il teorema per $f(t) = c$ in $\bar{\Omega}$. Per $c= 0$ l'unicità è ovvia; sia allora $c \neq 0$. Se u è soluzione del pdr verificante le condizioni $u(0) = s$, $\dot{u}^{+}(0) = b$, si ha (dalla (iv))

$$\frac{1}{2}\left[\dot{u}^{\pm}(t)\right]^{2} = \frac{1}{2}\,b^{2} - s\,c + c\,u(t) \qquad \text{per } t \in \bar{\Omega}. \tag{13}$$

Da (13) ricaviamo, per $u(t) = 0$,

$$\left[u^{\pm}(t)\right]^{2} = b^{2} - 2\,s\,c\ . \tag{14}$$

La tesi consegue, allora, in virtù di noti teoremi di unicità locale, dalle seguenti osservazioni.

1. Se è $b^{2} - 2\,s\,c > 0$, tutti gli eventuali zeri di u sono isolati; inoltre se τ_1 e τ_2 sono due zeri consecutivi $(\tau_2>\tau_1)$ si ha:

$$c(\tau_2-\tau_1) = 2\sqrt{b^2- 2\,s\,c}; \tag{15}$$

da cui

$$\tau_2-\tau_1 = \frac{2}{c}\sqrt{b^2 - 2\,s\,c}\ . \tag{16}$$

Da (15) segue che (c) per $c<0$ u ammette al più uno zero,(d) per $c>0$ gli zeri consecutivi di u sono equidistanti (e quindi sono in numero finito).

2. Se è $b^2 - 2sc = 0$ si ha

(e) $c > 0$: $u(t) \geq 0$ e quindi $u(t) = 0$ (per (13));

(f) $c < 0$: u ammette al più uno zero.

Per provare che (f) è vera, basta tenere conto che si ha:

u ha solo zeri isolati e non può avere più di uno zero isolato;

che u non possa avere più di uno zero isolato segue da (15); che abbia solo zeri isolati segue dal fatto che negli zeri τ di u è $\dot{u}(\tau) = 0$ ed $f(\tau) < 0$. Evidentemente u non ha zeri se $b^2 - 2sc < 0$. ∎

La dimostrazione del teorema 2 suggerisce il seguente risultato.

Teorema 3. Se u_1 ed u_2 hanno entrambe un numero finito di zeri e sono soluzioni in $\bar{\Omega}$ del pdr con dato $f \in C^\circ(\bar{\Omega};R)$ e stesse condizioni iniziali ammissibili (s,b), allora coincidono in $\bar{\Omega}$.

Dim.

Basta tenere conto del fatto che per i problemi di Cauchy del tipo

$$\begin{cases} \ddot{u}(t) = f(t) \\ u(0) = s \\ \dot{u}^+(0) = b \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} \ddot{u}(t) = f(t) \\ u(\tau) = 0 \\ \dot{u}(\tau) = -\dot{u}^-(\tau) \end{cases}$$

c'è unicità locale. ∎ Sussiste inoltre il seguente

Teorema 4.

Se u è soluzione del pdr in $\bar{\Omega}$ con $f \in C^\circ(\bar{\Omega};R)$ e verifica la condizione

"esiste $p>0$ tale che $[\dot{u}^{\pm}(\tau)]^2 \geq p$, per $u(\tau) = 0$",

allora u è l'unica soluzione del pdr.

Dim.

La condizione posta assicura che gli eventuali zeri di u sono isolati. Inoltre, per $f > 0$,[3] considerando due zeri isolati consecutivi τ_1,τ_2, si ha

$$\ddot{u}(\xi)(\tau_2-\tau_1) = f(\xi)(\tau_2-\tau_1) = \dot{u}^-(\tau_2) - \dot{u}^+(\tau_1) =$$
$$= |\dot{u}^-(\tau_2)| + |\dot{u}^-(\tau_1)| \geq 2\sqrt{p} > 0 .$$

Da ciò

$$(17) \qquad \tau_2 - \tau_1 \geq \frac{2\sqrt{p}}{f(\xi)} \geq \frac{2\sqrt{p}}{M}$$

dove $M = \max_{x\in\bar{\Omega}} f(x)$.

La (17) assicura che siamo nelle ipotesi del teorema 3. ∎

Concludiamo col

Teorema 5. Sia $f \in C^\circ(\bar{\Omega};R)$ con $\dot{f} \in L^1(\bar{\Omega};[0,+\infty[)$;

(g) Se $f(0) > 0$, per ogni condizione iniziale ammissibile $(s,b) \neq (0,0)$, esiste una unica soluzione del pdr in $\bar{\Omega}$.

(h) Per ogni condizione iniziale ammissibile (s,b) verificante la disuguaglianza $b^2-2sf(0)>0$ il pdr ammette una unica soluzione in $\bar{\Omega}$.

Dim.

Dalla conservazione dell'energia segue

$$(18) \qquad \frac{1}{2}[\dot{u}^\pm(\tau)]^2 \geq \frac{1}{2} b^2 - s\, f(0). \qquad \text{per} \quad u(\tau) \mp 0.$$

(g) Dalla (18) segue l'unicità in virtù del Teorema 4.

---

(3) Osserviamo esplicitamente che se $f \leq 0$, c'è unicità per la soluzione del pdr, essendoci al più uno zero per u.

(h) Intanto è $(s,b) \neq (0,0)$.

Se $f(0) > 0$ si ricade nel caso (g);se $f(0) < 0$, si ha che per $f(t) \leq 0$ u ha al più uno zero e per $f(t) > 0$ valgono le considerazioni di (g) . $\blacksquare$

Per il Teorema 5 si può prendere ad esempio

$$f(t) = a\,t \pm 1 \qquad \text{con } a \geq 0,\ t \in [0,T]\ , \quad \text{oppure}$$

$$f(t) = \sum_{i=0}^{n} a_i t^i \qquad a_i \geq 0\ (i=0,1,\dots n),\ t \in [0,T]\ .$$