

- Può essere interessante notare come delle quattro o cinque grosse di visioni classiche delle matematiche, (insieme ad Analisi, Algebra, Aritmetica, Fisica Matematica) l'unica sezione rimasta esplicitamente nella classificazione per argomenti dell'America Mathematical Society sia proprio la geometria. Ma essa riguarda infatti problemi ottocenteschi: i fondamenti della geometria, le geometrie euclidee e non, la geometria dei gruppi di trasformazione. E' rimasto il nome a ricordare per contrasto che non le compe te più alcuna funzione complessiva, ma solo una nostalgia storica. I fatti - piacciono o meno - oggi stanno così, si intende che possono cambiare, co me sempre.

- Come sempre negli ambienti accademici, in cui la carriera scientifica si fa per cooptazione dall'alto, anche questo aspetto assume la coloratura di uno scontro tra corporazioni: i geometri contro gli algebristi. A prima vista sembra una inoffensiva articolazione tra settori specialistici ciascuno dotato delle sue particolari idiosincrasie, ma il succitato caso Thom prova che forse potrebbe trattarsi di uno scontro tra paradigmi, nel senso di Kuhn.

#### A. Robinson e la Non-Standard Analysis.

Un luogo comune ben radicato nell'ideologia del matematico medio (che lo imparenta quindi con il positivismo logico volgare) è la convinzione dell'irrilevanza per il proprio lavoro delle questioni di Filosofia della Matematica. Nel programma bourbakista questo è del tutto esplicito, arrivando a prendere le distanze dalla Logica Matematica dandone anche severi giudizi di valore, ma persino nelle altre posizioni più pragmatiche e pluraliste si distingue nettamente tra problemi matematicamente interessanti e problemi filosoficamente interessanti. Ciascuna disciplina ha le sue regole, la coe sistenza è pacifica se si rispetta la non ingerenza negli affari interni altrui. Nella poco sopra citata classificazione della AMS la Philosophy of Mathematics compare solo come sottosezione della sezione "Generale" e di

quella dedicata alla "Logica e Fondamenti", che è largamente tecnica.

-Ma ci sono, per fortuna, sempre delle eccezioni ed il dissenso appare ben motivato e portato molto avanti. A. Robinson scrive un intero libro e fonda quasi una nuova disciplina, la "Analisi Non-Standard", onde rivendicare le idee di Leibniz sugli infinitesimi, considerati numeri che "posseggono le stesse proprietà" dei reali.

Si mostra in questo libro che le idee di Leibniz possono essere pienamente rivendicate e che conducono ad un nuovo e fruttifero approccio per l'Analisi Classica e per molte altre branche delle matematiche. La chiave del nostro metodo viene fornita dall'analisi accurata della relazione tra linguaggi matematici e strutture matematiche che sta alla radice della teoria odierna dei modelli (61).

A partire da quest'ultima, che costituisce un particolare settore della Logica Matematica, si rifà quindi l'Analisi attraverso la reinvenzione dei numeri reali. Questi ultimi diventano qui un campo ordinato non archimedeo, come si può intuire perché comprendono ora anche numeri infinitamente piccoli e infinitamente grandi. Dato un "infinitesimale" ed un numero "standard" non esiste nessun multiplo intero del primo che supera il secondo, lo stesso vale se si prende un numero "standard" ed un "infinito". Reso così preciso e ben fondato il concetto di infinitesimo (che la solita concezione del progresso storico pretenderebbe, sbagliando come si vede, di considerare insostenibile solo perché Cauchy e Weierstrass avevano scelto un'altra strada) si dà un nuovo concetto di limite, di derivata, di integrale, ritrovando teoremi di analisi reale e di analisi complessa. Si arriva alle distribuzioni, agli operatori degli spazi di Hilbert, ai gruppi di Lie, si danno applicazioni in idrodinamica ed in teoria dell'elasticità. Si suggerisce che l'eterno problema delle divergenze nella moderna Fisica Teorica potrebbe essere trattato con l'Analisi Non-Standard.

- Robinson pensa, non solo non si perda nulla con la sua teoria Non-Standard, ma anche che si guadagni qualche cosa.

---

(61) Robinson 1966 p. 2

E' naturale chiedersi se un metodo non standard (... cioè un metodo dell'Analisi Non-Standard) può essere rimpiazzato sempre da una dimostrazione matematica standard. Questa domanda presume che i metodi della Logica Matematica siano distinti dalle matematiche ordinarie, e noi possiamo esser d'accordo, per i nostri scopi presenti, che la distinzione sia significativa in pratica. La risposta alla domanda è allora che il metodo delle ultrapotenze fornisce un mezzo pronto a tradurre una dimostrazione non standard in una standard in ciascun caso particolare. Tuttavia facendo così si può complicare la dimostrazione considerevolmente in modo tale che spesso la procedura che ne risulta sarà meno desiderabile dal punto di vista euristico. Nello stesso tempo può ben esistere una dimostrazione matematica ottenibile indipendentemente ... crediamo di aver mostrato che ... i metodi non-standard possano aggiungere qualcosa di effettivo ai metodi standard sia nel gettare nuova luce su vecchie teorie sia per trovare nuovi risultati<sup>(62)</sup>.

- Questo modo di Robinson di rifare l'analisi classica è significativamente diverso dal modo bourbakista di algebrizzarla ed assiomatizzarla. N. Bourbaki vuole riorganizzare l'analisi pretendendo di mostrarne lo scheletro, ma per lui i problemi classici risolti sono risolti e cambiarne il linguaggio non ne cambia affatto i risultati che sono quelli che contano. Per Robinson un teorema non è costituito solo dal risultato perché la struttura logica e filosofica di una teoria ne è parte integrante. Riesumere uno scontro, gettare nuova luce su una vecchia questione, come è quella dei fondamenti del calcolo infinitesimale, è significativo sia per il matematico sia per lo storico. Contrariamente al Bourbaki, per il quale il problema dei fondamenti è chiuso ed irrilevante rispetto alle teorie matematiche importanti, qui non solo esso è aperto, come rilevante problema filosofico degli infiniti e degli infinitesimi, ma diventa un problema essenziale dell'Analisi.

- La storia della Filosofia della Matematica coincide largamente con quella delle fondazioni del calcolo infinitesimale... il problema dell'infinito che a detta di molti è ancora uno degli argomenti principali della Filosofia della Matematica, sebbene con uno scopo allargato e differente enfasi, è essenzialmente lo stesso problema che arrovellava i fondatori dell'Analisi Matematica (63).

---

(62) Ibidem p. 4-5, sott. dell'autore

(63) Ibidem p. 281.

Così Robinson critica certi aspetti della teoria degli insiemi.

Al momento il punto di vista cantoriano è quello sostenuto dalla maggioranza dei matematici. Ma forse la nostra rassegna storica suggerisce che proprio come il calcolo infinitesimale, che trionfa a metà '700 fu posto su fondamenta completamente nuove nei cent'anni successivi, così le future generazioni di matematici pur accettando i risultati formali della Teoria degli Insiemi, possono rigettare le pretese platonistiche comunemente associate ad essa (64).

- Si confronti con l'affermazione di J. Dieudonné:

A proposito dei fondamenti noi crediamo nella realtà della matematica, ma naturalmente quando i filosofi ci attaccano con i loro paradossi corriamo a nasconderci dietro il formalismo e diciamo: "La matematica è proprio una combinazione di simboli privati del significato" e tiriamo fuori i capitoli 1 e 2 sugli insiemi. Finalmente ci lasciano ritornare in pace alla nostra matematica per farla come l'abbiamo sempre fatta con la sensazione, che ha ogni matematico, di stare a lavorare a qualcosa di reale. Questa sensazione è probabilmente una illusione, ma è molto conveniente (65).

La questione della realtà è invece affrontata in Robinson così:

ci appare oggi che i numeri infinitamente grandi ed infinitamente piccoli di un modello non-standard dell'Analisi sono reali né più e né meno - ad esempio - dei numeri irrazionali standard. Questo è ovvio se introduciamo tali numeri attraverso gli insiemi mentre nell'approccio genetico sia gli irrazionali standard sia i numeri non standard vanno introdotti attraverso processi infinitari. Questa affermazione è egualmente vera se affrontiamo il problema dal punto di vista dello scienziato empirico. [Visto che tutte le misure sono registrate in termini di interi o razionali, anche se il nostro schema teorico va al di là di questi, non c'è ragione allora che ci costringa a rimanere all'interno di un sistema numerico archimedeo (66).

---

(64) Ibidem p. 281, cfr. Robinson 1972 p. 39,45

(65) Dieudonné 1970 p. 145 sott. dell'autore

(66) Robinson 1966 p. 282.

- Assiomi sì, ma corredati consapevolmente di un punto di vista critico nei confronti dell'Analisi, ed associati ad il ritorno di una problematica che il matematico medio tende a dimenticare. Al proposito Robinson non esita a rivendicare la propria ideologia di cui riconosce l'importanza per le matematiche e che addirittura chiama, senza caricarla di connotazioni negative, "la metafisica" (67). Anche qui come nel bourbakismo si deve riprendere in mano la storia, ma lo si fa con intenti e concezioni assai diverse. Se gli Eléments rimangono tali anche se non si leggono le note storiche, perché sono apologetiche, alla Non-Standard Analysis senza la storia mancherebbe una profondità sostanziale. Di più, dalla concezione di Robinson gli storici del "progresso scientifico" avrebbero molto da imparare.

L'ultimo capitolo contiene una rassegna di certi stadi nella storia del Calcolo Differenziale ed Integrale che hanno a che fare con la teoria degli infinitesimi. Il fatto che i più recenti scrittori in questo campo fossero convinti che nessuna teoria simile poteva essere sviluppata effettivamente qualifica il loro giudizio storico. Quindi una revisione si è resa necessaria (68).

Ma gli storici ed i filosofi delle scienze sono in genere così poco attenti alle reali pratiche della ricerca ed agli ultimi prodotti di essa che hanno in genere taciuto. Solo Lakatos ha raccolto l'avvertimento, ma per trasformarlo in una occasione, sia di critica all'immagine assiomatico-deduttiva delle matematiche, sia di articolazione a questo caso storico del modello falsificazionista popperiano (69). Ad ennesima riprova che certe concezioni storiografiche sono tanto poco aderenti ai fatti quanto soprattutto atti di fede nel progresso.

---

(67) Robinson 1972 p. 28

(68) Robinson 1966 p. 4

(69) Lakatos 1978; cfr. anche p 56 del presente lavoro.