INTRODUZIONE.

Sia $M$ una varietà differenziabile di classe $\mathcal{C}^\infty$, dimensione $n$, si indichi con $\mathfrak{F}(M)$ l'anello delle funzioni differenziabili su $M$ e con $\mathfrak{D}_1(M)$ l'$\mathfrak{F}(M)$-modulo dei campi di vettori su $M$; una pseudoconnessione lineare su $M$ è una coppia ordinata $(A,\nabla)$ dove $A$ è un campo tensoriale differenziabile di specie $(1,1)$ su $M$ e $\nabla : X \to \nabla_X$ è un $\mathfrak{F}(M)$-omomorfismo di $\mathfrak{D}_1(M)$ nell'$\mathfrak{F}(M)$-modulo degli $\mathbb{R}$-endomorfismi di $\mathfrak{D}_1(M)$, soddisfacente l'assioma

$$\nabla_X f Y = f\nabla_X Y + A(X)(f)Y$$

per ogni $X,Y \in \mathfrak{D}_1(M)$ e per ogni $f \in \mathfrak{F}(M)$.

Scopo del presente lavoro è lo studio di pseudoconnessioni lineari su una varietà fogliettata, più precisamente nel n. 1 si introduce la nozione di pseudoconnessione fogliettata e se ne trova una caratterizzazione mediante il campo di torsione e l'applicazione di curvatura della pseudoconnessione stessa; si introducono poi le nozioni di pseudoconnessione trasversa e proiettabile e se ne mettono in evidenza alcune proprietà; nel n. 2 si studiano pseudoconnessioni sul fibrato trasverso alla fogliazione, indotte da pseudoconnessioni lineari trasverse o fogliettate; infine nel n. 3 si definisce il lift completo di una pseudoconnessione lineare su una varietà differenziabile $M$ e nel caso di $M$ fogliettata si dà una caratterizzazione di una pseudoconnessione lineare fogliettata mediante il suo lift completo.

n. 1 - Pseudoconnessioni fogliettate.-

In questo paragrafo si denoterà con $M$ una varietà differenziabile $\mathcal{C}^\infty$ e dimensione $n$, munita di una struttura fogliettata definita da una distribuzione involutoria $\mathcal{D}$ di dimensione costante $r < n$.

Def. 1.1.- Una pseudoconnessione lineare $(A,\nabla)$ su $M$ si dice fogliettata se soddisfa alle condizioni:

a) $A(X) \in \bar{\mathcal{D}}_1(M)$ $\qquad\qquad \forall X \in \bar{\mathcal{D}}_1(M)$

b) $\nabla_X Y \in \bar{\mathcal{D}}_1(M)$ $\qquad\qquad \forall X,Y \in \bar{\mathcal{D}}_1(M)$

essendo $\bar{\mathcal{D}}_1(M)$ l'algebra di Lie di campi di vettori fogliettati[1] su $M$.

Osservazione 1.1.-

Essendo $\bar{\mathcal{D}}_1(M)$ un'algebra di Lie, per ogni campo tensoriale differenziabile $A$ di specie $(1,1)$ fogliettato su $M$ e per ogni $X,Y \in \bar{\mathcal{D}}_1(M)$, risulta $[X,Y]_A$ un campo di vettori fogliettato, essendo $[X,Y]_A$ definito da (c.f.r. [3]):

$$[X,Y]_A = [A(X),Y] - [X,A(Y)] - A([X,Y]) .$$

Dalla precedente osservazione segue subito la proposizione

Prop. 1.1.- Se $(A,\nabla)$ è una pseudoconnessione lineare fogliettata su $M$ allora il campo tensoriale $T$ di torsione e l'applicazione di curvatura $R$ di $(A,\nabla)$ sono fogliettati.

Prop. 1.2.- Una pseudoconnessione lineare $(A,\nabla)$ su $M$ è fogliettata se e solo se indicate con $A^\delta_\beta$ , $\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}$ le componenti di $(A,\nabla)$ rispetto ad un sistema di coordinate adattate $(x^a, x^{\bar{a}})$, si ha:

---

(1) c.f.r. [5]

a') $A_b^{\bar{a}} = 0$

$\partial_a A_\alpha^{\bar{a}} = 0$

b') $\Gamma_{\alpha b}^{\bar{a}} = 0$

$\Gamma_{a\beta}^{\bar{a}} = 0$

$\partial_a \Gamma_{\alpha\beta}^{\bar{a}} = 0$

per ogni $a,b = 1,2,\dots,r$; $\bar{a} = r+1,\dots,n$; $\alpha,\beta = 1,2,\dots,n$ .

Dimostrazione.

Per brevità ci si limita a dimostrare solo la condizione necessaria; se $(A,\nabla)$ è fogliettata allora le a') seguono dalle (2.10) e (2.11) di pag. 14 c.f.r.[5]; per provare le b') si osservi che se $X^\alpha$ sono le componenti di un campo di vettori fogliettato su $M$, allora le combinazioni lineari del tipo:

$$X_\beta^\alpha = A_\beta^\delta \partial_\delta X^\alpha + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha X^\gamma$$

sono le componenti di un campo tensoriale fogliettato di specie (1,1) su $M$, rispetto ad un sistema coordinato $(x^\alpha)$ qualunque; in un sistema di coordinate adattate $(x^a, x^{\bar{a}})$ si ha in particolare per $X = \frac{\partial}{\partial x^\alpha}$

$$X_b^{\bar{a}} = \Gamma_{b\alpha}^{\bar{a}}$$

ed essendo $X_b^{\bar{a}} = 0$ per la 2.10 di pag. 14 c.f.r.[5], segue che $\Gamma_{b\alpha}^{\bar{a}} = 0$.

Il campo tensoriale di torsione $T$ di $(A,\nabla)$ essendo fogliettato per la 2.17 di pag. 15 c.f.r.[5], in coordinate adattate $(x^a;x^{\bar{a}})$, deve soddisfare alla condizione:

$$T\left(\frac{\partial}{\partial x^b}, \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\right) \in \mathfrak{D} \qquad \begin{array}{l} b = 1,\dots,r \\ \alpha = 1,\dots,n \end{array}$$

da questa dopo semplici calcoli si ricava:

$$\{\Gamma^{\beta}_{b\alpha} - \Gamma^{\beta}_{\alpha b} - (\partial_b A^{\beta}_{\alpha} - \partial_{\alpha} A^{\beta}_{b})\}\partial_{\beta} \in \mathfrak{D}$$

da cui si ottiene:
$$\Gamma^{\bar{c}}_{b\alpha} - \Gamma^{\bar{c}}_{\alpha b} - \partial_b A^{\bar{c}}_{\alpha} + \partial_{\alpha} A^{\bar{c}}_{b} = 0$$

essendo poi $\Gamma^{\bar{c}}_{b\alpha} = 0$ e gli ultimi due addendi nulli per la a') già dimostrata, si ha $\Gamma^{\bar{c}}_{\alpha b} = 0$.

L'ultima uguaglianza delle b') segue subito dalle (2.3) di pag. 12 c.f.r. [5]. ∎

Una caratterizzazione intrinseca delle pseudoconnessioni lineari fogliettate su $M$ è messa in luce dalla seguente proposizione:

Prop. 1.3.- <u>Una pseudoconnessione lineare</u> $(A,\nabla)$ <u>su</u> $M$ <u>è fogliettata se e solo se indicati con</u> $T$ <u>il campo tensoriale di torsione e con</u> $R$ <u>l'applicazione di curvatura di</u> $(A,\nabla)$ <u>risulta:</u>

a") $A(X) \in \mathfrak{D}$

$\nabla_X Y \in \mathfrak{D}$

b") $T(X,Y) \in \mathfrak{D}$

$R(X,Y)\, Z \in \mathfrak{D}$

per ogni $X \in \mathfrak{D}$ e per ogni $Y,Z \in \mathfrak{D}_1(M)$.

Dimostrazione.

Sempre per brevità ci si limita a dimostrare la condizione necessaria. Se $(A,\nabla)$ è fogliettata, allora in coordinate adattate $(x^a, x^{\bar{a}})$, della prop. 1.1 segue che $A^{\bar{a}}_{b} = 0$ e $\Gamma^{\bar{a}}_{b\alpha} = 0$, per cui essendo $\partial_b \in \mathfrak{D}$ si ha:

$$A(\partial_b) = A_b^a\, \partial_a \in \mathcal{D} \qquad \text{e} \qquad \nabla_{\partial_b} \partial_\alpha = \Gamma_{b\alpha}^{\ a}\, \partial_a \in \mathcal{D}$$

da queste seguono immediatamente le a").

Per provare le b") basta tener presente che $T$ ed $R$ essendo fogliettati soddisfano alla (2.17) di pag. 15 c.f.r. [5]. ■

Def. 1.2. - <u>Una pseudoconnessione lineare</u> $(A,\nabla)$ <u>su</u> $M$ <u>si dice trasversa alla fogliazione se soddisfa alle condizioni:</u>

$$A(X) \in \mathcal{D}$$
$$\nabla_Y X \in \mathcal{D}$$
$$T(X,Y) \in \mathcal{D}$$

<u>per ogni</u> $X \in \mathcal{D}$ <u>e per ogni</u> $Y \in \mathcal{D}_1(M)$.

<u>Osservazione</u> 1.2.-

Se $(A,\nabla)$ e $(A,\nabla')$ sono pseudoconnessioni lineari trasverse su $M$, allora il tensore $S$ definito da

$$S(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla'_X Y \qquad \forall X,Y \in \mathcal{D}_1(M)$$

soddisfa alla proprietà:

"$S(X,Y) \in \mathcal{D}$ se $X$ oppure $Y$ appartiene a $\mathcal{D}$".

Viceversa se $(A, \nabla')$ è una pseudoconnessione lineare trasversa ed $(A,\nabla)$ è una pseudoconnessione lineare su $M$ tale che il tensore $S$ soddisfa alla proprietà $S(X,Y) \in \mathcal{D}$ se $X$ oppure $Y$ appartiene a $\mathcal{D}$, allora anche $(A,\nabla)$ è trasversa; infatti con ovvio significato dei simboli, sottraendo membro a membro le due uguaglianze:

$$T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]_A$$
$$T'(X,Y) = \nabla'_X Y - \nabla'_Y X - [X,Y]_A$$

si ottiene:

$$T(X,Y) = T'(X,Y) - S(X,Y) - \nabla_Y X + \nabla'_Y X$$

allora se $X \in \mathfrak{D}$ per ipotesi deve aversi $T'(X,Y) \in \mathfrak{D}$ , $\nabla'_Y X \in \mathfrak{D}$ , inoltre essendo $\nabla_Y X = \nabla'_Y X + S(Y,X)$, risulta ovviamente anche $\nabla_Y X \in \mathfrak{D}$; si conclude allora che $T(X,Y) \in \mathfrak{D}$ per ogni $X \in \mathfrak{X}$ quindi $(A,\nabla)$ è trasversa.

Def. 1.3.- Una pseudoconnessione lineare $(A,\nabla)$ su $M$ si dice che conserva parallela la distribuzione $\mathfrak{D}$ se soddisfa alle condizioni:

$$A(X) \in \mathfrak{D}$$
$$\nabla_Y X \in \mathfrak{D}$$

per ogni $X \in \mathfrak{D}$ e per ogni $Y \in \mathfrak{D}_1(M)$.

Ovviamente ogni pseudoconnessione lineare fogliettata è anche trasversa e ogni pseudoconnessione lineare trasversa conserva la distribuzione $\mathfrak{D}$ parallela, ma non viceversa.

## n.2. - Pseudoconnessioni sul fibrato trasverso.

In questo paragrafo si denoterà con $M$ una varietà differenziabile paracompatta fogliettata, con fogliazione definita da una distribuzione involutoria $\mathfrak{D}$ di dimensione $r$; la distribuzione $\mathfrak{D}$ individua un sottofibrato $D$ del fibrato tangente $TM$, di dimensione $r$, essendo la fibra sopra $x \in M$ il sottospazio $\mathfrak{D}_x$ dello spazio tangente $T_x(M)$, il fibrato $Q = T(M)/D$ è il fibrato trasverso al fogliettamento; ogni punto di $Q$ è una classe di equivalenza $\{X_x\}$ dove $X_x \in T_x(M)$, e due vettori $X_x$ e $Y_x$ di $T_x(M)$ appartengono alla stessa classe di equivalenza se la loro differenza $X_x - Y_x$ appartiene al sottospazio $\mathfrak{D}_x$.

Prop. 2.1.- Ogni pseudoconnessione lineare $(A,\nabla)$ su $M$ che conserva parallela la distribuzione $\mathcal{D}$, induce una pseudoconnessione $\overset{*}{\Gamma}$ sul fibrato trasverso $Q$, avente il campo $A$ come campo tensoriale associato.

Dimostrazione.

Per ogni punto $p \in M$, per ogni $Z_p \in T_p(M)$ e per ogni sezione $\phi : p \to \{X_p\}$ del fibrato $Q$, si ponga;

$$\overset{*}{\nabla}_{Z_p} \phi = \pi(\nabla_{Z_p} X)$$

dove $\pi : T(M) \to T(M)/D$ è la surgezione canonica ed $X$ è un campo di vettori su $M$ tale che per ogni $q \in M$ risulta $\phi(q) = \{X_q\}$.

Si verifica facilmente che per $\overset{*}{\nabla}$ sono soddisfatte le proprietà:

1) $\overset{*}{\nabla}_{X+Y}\phi = \overset{*}{\nabla}_X\phi + \overset{*}{\nabla}_Y\phi$

2) $\overset{*}{\nabla}_X(\phi+\psi) = \overset{*}{\nabla}_X\phi + \overset{*}{\nabla}_Y \psi$

3) $\overset{*}{\nabla}_{fX}\phi = f\, \overset{*}{\nabla}_X\phi$

4) $\overset{*}{\nabla}_X(\alpha\phi) = \alpha\overset{*}{\nabla}_X\phi$

5) $\overset{*}{\nabla}_X(f\phi) = f\, \overset{*}{\nabla}_X\phi + A(X)(f)\phi$

per ogni $X,Y \in \mathfrak{D}_1(M)$, $f \in \mathfrak{F}(M)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\phi$ e $\psi$ sezioni differenziabili di $Q$; resta allora definita una ed una sola pseudoconnessione $\overset{*}{\Gamma}$ sul fibrato $Q$ avente $A$ come campo tensoriale associato e rispetto alla quale $\nabla^*_{Z_p}$ è la pseudoderivata covariante di $\phi$ rispetto a $Z_p$ (c.f.r.[2] pag.131), ∎

Prop. 2.2.- Se $(A,\nabla)$ è una pseudoconnessione lineare trasversa su $M$, allora per ogni $Z \in \mathcal{D}$ e per ogni sezione $\phi$ di $Q$ risulta:

$$\overset{*}{\nabla}_Z\, \phi = \pi([Z,X]_A)$$

essendo $\phi(q) = \{X_q\}$ per ogni $q \in M$ e $\overset{*}{\nabla}_Z\phi$ la pseudoderivata covariante di $\phi$ rispetto a $Z$ della pseudoconnessione $\overset{*}{\Gamma}$ su $Q$ associata ad $(A,\nabla)$. $\overset{*}{\Gamma}$ si chiamerà pseudoconnessione basica (o pseudoconnessione di Bott[1]) sul fibrato trasverso $Q$.

Dimostrazione. -

Infatti per ogni $Z \in \mathfrak{D}_1(M)$ e per ogni sezione $\phi$ di $Q$ si ha:

$$\overset{*}{\nabla}_Z\phi = \pi(\nabla_Z X) = \pi(\nabla_X Z - T(X,Z) - [X,Z]_A) =$$

$$= \pi(\nabla_X Z) + \pi(T(Z,X)) - \pi([X,Z]_A)$$

se $Z \in \mathfrak{D}$ essendo $(A,\nabla)$ trasversa risulta $\nabla_X Z \in \mathfrak{D}$ e $T(Z,X) \in \mathfrak{D}$ e quindi $\pi(\nabla_X Z) = \pi(T(Z,X)) = 0$ da cui la tesi. ∎

Prop. 2.3. - Sia $(A,\nabla)$ una pseudoconessione lineare fogliettata su $M$, l'applicazione di curvatura[2] $R^*$ della pseudoconnessione $\overset{*}{\Gamma}$ associata ad $(A,\nabla)$ soddisfa alla proprietà:

$$R^*(X,Y)\phi = 0$$

per ogni $X \in \mathfrak{D}$, $Y \in \mathfrak{D}_1(M)$ e per ogni sezione $\phi$ di $Q$.

$\overset{*}{\Gamma}$ si chiamerà nel seguito pseudoconnessione proiettabile[3].

---

(1) Tale denominazione è giustificata dal fatto che se $A$ è il campo tensoriale di Kronecker, allora $\overset{*}{\nabla}$ è una connessione basica secondo Bott (c.f.r. [1] pag. 33).

(2) L'applicazione di curvatura $R$ di una pseudoconnessione $\Gamma$ su $Q$ è definita da: $R(X,Y)\phi = \nabla_X(\nabla_Y\phi) - \nabla_Y(\nabla_X\phi) - \nabla_{[X,Y]_A}\phi$ per ogni $X,Y \in \mathfrak{D}_1(M)$ e $\phi$ sezione di $Q$; $\nabla$ ed $A$ sono rispettivamente la pseudoderivata covariante ed il campo tensoriale associati a $\Gamma$.

(3) Tale denominazione è giustificata dal fatto che se $A$ è il campo tensoriale di Kronecker allora $\overset{*}{\Gamma}$ è una connessione proiettabile secondo Molino oppure basica secondo Kamber - Tondeur (c.f.r. [4]).

Dimostrazione. -

Se $X$ ed $Y$ sono campi di vettori su $M$ e $\phi : q \to \{Z_q\}$ è una sezione del fibrato $Q = T(M)/D$, si ha:

$R^*(X,Y)\phi = \overset{*}{\nabla}_X(\overset{*}{\nabla}_Y \phi) - \overset{*}{\nabla}_Y(\overset{*}{\nabla}_X\phi) - \overset{*}{\nabla}_{[X,Y]_A}\phi =$

$\pi(\nabla_X (\nabla_Y Z) - \nabla_Y(\nabla_X Z) - \nabla_{[X,Y]_A} Z) = \pi(R(X,Y)Z)$; se $X \in \mathfrak{D}$ allora per la b") della prop. 1.3 deve risultare

$R(X,Y)Z \in \mathfrak{D}$ e quindi $\pi(R(X,Y)Z) = 0$, da cui la tesi. ∎

I risultati ora esposti, si possono invertire in quanto vale il seguente teorema:

Teorema 2.1.- <u>Ogni pseudoconnessione</u> $\overset{*}{\Gamma}$ <u>sul fibrato trasverso</u> $Q$ <u>induce una pseudoconnessione lineare su</u> $M$, <u>trasversa o fogliettata a seconda che</u> $\overset{*}{\Gamma}$ <u>è basica oppure proiettabile</u>.

Dimostrazione. -

Avendo supposto $M$ paracompatta allora esiste una metrica riemanniana su $M$ e quindi si può costruire il fibrato vettoriale $D^\perp$ (isomorfo a $Q$) tale che $T(M) = D \oplus D^\perp$ ; inoltre fissato un campo tensoriale differenziabile $A$ di specie (1,1) su $M$, esiste una pseudoconnessione $\bar{\Gamma}$ sul fibrato $D$ associata ad $A$ (c.f.r.[2] pag. 114); premesso ciò sia $\overset{*}{\Gamma}$ una pseudoconnessione sul fibrato trasverso $Q$, avente $A$ come campo tensoriale associato e siano inoltre $\bar{\nabla}$ , $\overset{*}{\nabla}$ le pseudoderivate covarianti di $\bar{\Gamma}$ e $\overset{*}{\Gamma}$ rispettivamente, indicato con $p$ l'isomorfismo tra $D^\perp$ e $Q = T(M)/D$, sia $\nabla$ l'operatore definito da:

$$\nabla_X Y = \bar{\nabla}_X Y_1 + p(\nabla^*{}_X \phi)$$

per ogni $X,Y = Y_1 + Y_2 \in \mathfrak{D}_1(M)$ e per ogni sezione $\phi$ di $Q$ tale che $\phi(q) = \{Y_q\}$ per ogni $q \in M$. La coppia $(A,\nabla)$ è una pseudoconnessione lineare su $M$ che induce $\overset{*}{\Gamma}$ su $Q$, in quanto essendo $\bar{\nabla}_X Y_1 \in \mathfrak{D}$ e $\pi \circ p = i_Q$ si ha:

$$\pi(\nabla_X Y) = \pi(\bar{\nabla}_X Y_1) + \pi(p(\overset{*}{\nabla}_X \phi)) = \overset{*}{\nabla}_X \phi$$

Se si fa l'ipotesi che $Y \in \mathfrak{D}$ allora $Y_2 = 0$ e quindi $\phi = 0$, da cui si ottiene: $\nabla_X Y = \bar{\nabla}_X Y_1 \in \mathfrak{D}$ .

Si supponga ora $\overset{*}{\Gamma}$ basica, allora $A(X) \in \mathfrak{D}$ se $X \in \mathfrak{D}$ , inoltre se $X \in \mathfrak{D}$ e $Y \in \mathfrak{X}_1(M)$ per il campo tensoriale di torsione $T$ di $(A,\nabla)$ si ha:

$$\begin{aligned} \pi(T(X,Y)) &= \pi(\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]_A) = \\ &= \pi(\nabla_X Y) - \pi([X,Y]_A) = 0 \end{aligned}$$

da cui consegue che $T(X,Y) \in \mathfrak{D}$ e quindi $(A,\nabla)$ è trasversa.

Se $\overset{*}{\Gamma}$ è proiettabile allora per ogni $X \in \mathfrak{D}$ risulta $A(X) \in \mathfrak{D}$ ed inoltre per ogni $X \in \mathfrak{D}$ , $Y$, $Z \in \mathfrak{D}_1(M)$ con ovvio significato dei simboli si ha:

$$\begin{aligned} \pi(R(X,Y)Z) &= \pi(\nabla_X(\nabla_Y Z) - \nabla_Y(\nabla_X Z) - \nabla_{[X,Y]_A} Z) = \\ &= \pi(\nabla_X(\bar{\nabla}_Y Z_1) + \nabla_X\, p(\overset{*}{\nabla}_Y \phi) - \nabla_Y \bar{\nabla}_X Z_1 - \\ &\quad - \nabla_Y\, p(\overset{*}{\nabla}_X \phi) - \bar{\nabla}_{[X,Y]_A} Z_1 - p(\overset{*}{\nabla}_{[X,Y]_A} \phi\ ) \end{aligned}$$

poiché $\bar{\nabla}_Y Z_1 \in \mathfrak{D}$ risulta $\nabla_X(\bar{\nabla}_Y Z_1) \in \mathfrak{D}$ e $\nabla_Y(\bar{\nabla}_X Z_1) \in \mathfrak{D}$ e quindi la precedente uguaglianza si riduce a:

$$\begin{aligned} \pi(R(X,Y)Z) &= \pi(\nabla_X(p\, \overset{*}{\nabla}_Y \phi)) - \pi(\nabla_Y(p\, \overset{*}{\nabla}_X \phi)) - \overset{*}{\nabla}_{[X,Y]_A} \phi = \\ &= \overset{*}{\nabla}_X(\overset{*}{\nabla}_Y \phi) - \overset{*}{\nabla}_X(\overset{*}{\nabla}_Y \phi) - \overset{*}{\nabla}_{[X,Y]_A} \phi = \\ &= \overset{*}{R}(X,Y)Z = 0 \end{aligned}$$

da cui si conclude che $R(X,Y)Z \in \mathfrak{D}$ e quindi $(A,\nabla)$ è foglietta. ∎

n.3. - <u>Lift completo di una pseudoconnessione lineare</u>.

Sia $M$ una varietà differenziabile di classe $C^\infty$ e dimensione $n$, ogni sistema di coordinate locali $(x^i)$ in un intorno di un punto $p \in M$ induce un sistema di coordinate locali $(x^i, \dot{x}^i)$ sul fibrato tangente $T(M)$, la base naturale nel generico punto $(x;\dot{x})$ di $T(M)$ è data da $\left(\frac{\partial}{\partial x^i} ; \frac{\partial}{\partial \dot{x}^i}\right)$ ; se $(x'^{i'})$ è un altro sistema di coordinate locali nell'intorno di $p \in M$, allora sussistono le uguaglianze (c.f.r. [7] pag. 3)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x'^{h'}} = \dfrac{\partial x^h}{\partial x'^{h'}} \dfrac{\partial}{\partial x^h} \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial \dot{x}'^{h'}} = \dfrac{\partial^2 x^h}{\partial x'^{h'} \partial x'^{i'}} \dot{x}'^{i'} \dfrac{\partial}{\partial x^h} + \dfrac{\partial x^h}{\partial x'^{h'}} \dfrac{\partial}{\partial \dot{x}^h} \end{cases}$$

Se $f \in \mathfrak{F}(M)$ si chiama <u>lift verticale</u> di $f$ la funzione $f^V = f \circ \pi$ essendo $\pi : T(M) \to M$ la proiezione del fibrato tangente $T(M)$.

Se $X$ è un campo di vettori su $M$ rappresentato localmente da $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ il <u>lift verticale</u> di $X$ è il campo vettoriale $X^V$ su $T(M)$ rappresentato localmente da: $X^V = X^i \frac{\partial}{\partial \dot{x}^i}$ ; si chiama invece <u>lift completo</u> di $X$, il campo di vettori $X^C$ su $T(M)$ rappresentato localmente da: $X^C = X^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \dot{x}^j \frac{\partial X^i}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial \dot{x}^i}$

Prop. 3.1.- <u>Sia</u> $(A,\nabla)$ <u>una pseudoconnessione lineare su</u> $M$, <u>allora esiste una ed una sola pseudoconnessione lineare</u> $(A^C,\nabla^C)$ <u>su</u> $T(M)$ <u>univocamente caratterizzata dalle condizioni:</u>

(1) $A^C(X^C) = (A(X))^C \qquad \forall X \in \mathfrak{D}_1(M)$

(2) $\nabla^C_{X^C} Y^C = (\nabla_X Y)^C \qquad \forall X,Y \in \mathfrak{D}_1(M)$

Dimostrazione. -

La (1) dice che $A^C$ è il lift completo del campo tensoriale $A$, che è univocamente determinato (c.f.r. [7] pag. 20).

Sia $(A^C, \tilde{\nabla})$ una pseudoconnessione lineare su $T(M)$ tale che:

(3) $$\tilde{\nabla}_{X^C} Y^C = (\nabla_X Y)^C \qquad \forall X, Y \in \mathcal{D}_1(M)$$

allora tenendo conto che (c.f.r. [7] pag. 14):

$$(fX)^C = f^C X^V + f^V X^C \qquad \forall f \in \mathcal{F}(M);\ \forall X \in \mathcal{D}_1(M)$$

si ottiene:

$$\tilde{\nabla}_{X^C}(fY)^C = \tilde{\nabla}_{X^C}(f^C Y^V + f^V Y^C) = A^C(X^C)(f^C)Y^V +$$

$$+ A^C(X^C)(f^V)Y^C + f^C \tilde{\nabla}_{X^C} Y^V + f^V \tilde{\nabla}_{X^C} Y^C =$$

$$= (A(X)(f))^C Y^V + (A(X)(f))^V Y^C + f^V(\nabla_X Y)^C + f^C \tilde{\nabla}_{X^C} Y^V .$$

D'altra parte risulta anche:

$$\tilde{\nabla}_{X^C}(fY)^C = (\nabla_X fY)^C = (f \nabla_X Y + A(X)(f)Y)^C =$$

$$= f^C(\nabla_X Y)^V + f^V(\nabla_X Y)^C + A(X)(f)^C Y^V + A(X)(f)^V Y^C$$

da cui si ricava che:

(4) $$\tilde{\nabla}_{X^C} Y^V = (\nabla_X Y)^V$$

In modo analogo si prova che:

(5) $$\tilde{\nabla}_{X^V} Y^C = (\nabla_X Y)^V$$

Dalla (3) (o anche dalla (4) si deduce che

$$(6) \qquad \tilde{\nabla}_{X^V} Y^V = 0$$

infatti

$$\tilde{\nabla}_{(fX)^C} Y^V = \tilde{\nabla}_{f^C X^V + f^V X^C} Y^V = f^C \tilde{\nabla}_{X^V} Y^V + f^V (\nabla_X Y)^V$$

$$\tilde{\nabla}_{(fX)^C} Y^V = (\nabla_{fX} Y)^V = (f\nabla_X Y)^V = f^V (\nabla_X Y)^V$$

Le uguaglianze (3)(4)(5)(6) provano che la pseudoconnessione lineare $(A^C, \tilde{\nabla})$ se esiste è unica.

Per dimostrare l'esistenza si fissi una carta locale $(V,\phi)$ su $M$ e sia $(x_i)$ il relativo sistema coordinato; è noto che $(x_1^C,\dots,x_n^C;\ x_1^V,\dots,x_n^V)$ è un sistema coordinato su $T(M)$; su $\pi^{-1}(U)$ si definisce una pseudoconnessione lineare $(\tilde{A}^{(U)}, \tilde{\nabla}^{(U)})$ univocamente determinata dalle condizioni:

$$(7) \qquad \begin{cases} \tilde{A}^{(U)} = (A^{(U)})^C \\ \tilde{\nabla}^{(U)}_{X_i^C} X_j^C = (\nabla^{(U)}_{X_i} X_j)^C \\ \tilde{\nabla}^{(U)}_{X_i^V} X_j^C = (\nabla^{(U)}_{X_i} X_j)^V \\ \tilde{\nabla}^{(U)}_{X_i^C} X_j^V = (\nabla^{(U)}_{X_i} X_j)^V \\ \tilde{\nabla}^{(U)}_{X_i^V} X_j^V = 0 \end{cases}$$

dove $X_i = \dfrac{\partial}{\partial x_i}$ $(i = 1,\dots,n)$ ed $(A^{(U)}, \nabla^{(U)})$ è la pseudoconnessione lineare indotta da $(A,\nabla)$ su $U$.

Se $(W,\Psi)$ è un'altra carta locale su $M$ tale che $U \cap W \neq \emptyset$ e se $(\tilde{A}^{(W)}, \tilde{\nabla}^{(W)})$ è la pseudoconnessione lineare su $\pi^{-1}(W) \subset T(M)$ definita dalla (7), allora si può verificare facilmente che su $\pi^{-1}(U) \cap \pi^{-1}(W)$ le pseudoconnessioni lineari indotte rispettivamente da $(\tilde{A}^{(U)}, \tilde{\nabla}^{(U)})$ e $(A^{(W)}, \tilde{\nabla}^{(W)})$, sono le stesse; resta così definita globalmente su $T(M)$ una pseudoconnessione lineare $(\tilde{A},\tilde{\nabla})$ soddisfacente le condizioni volute.

Indicato con $(y_i)$ il sistema coordinato relativo alla carta $(W,\Psi)$ e posto $Y_i = \frac{\partial}{\partial y_i}$ si proverà per brevità che in $\pi^{-1}(U) \cap \pi^{-1}(W)$ si ha:

$$\tilde{\nabla}^{(U)}_{Y_i^C} Y_j^C = \tilde{\nabla}^{(W)}_{Y_i^C} Y_j^C = (\nabla_{Y_i} Y_j)^C .$$

Infatti posto $Y_i = \xi_i^j X_j$, si ha:

$$\tilde{\nabla}^{(U)}_{Y_i^C} Y_j^C = \tilde{\nabla}^{(U)}_{(\xi_i^h)^C X_h^V + (\xi_i^h)^V X_h^C} ((\xi_j^k)^C X_k^V + (\xi_j^k)^V X_k^C) =$$

$$= (\xi_i^h)^C (A^C(X_h^V)(\xi_j^k)^C) X_k^V + (\xi_i^h)^C (A^C(X_h^V)(\xi_j^k)^V) X_k^C +$$

$$+ (\xi_i^h)^V (A^C(X_h^C)(\xi_j^k)^C) X_k^V + (\xi_i^h)^V (A^C(X_h^C)(\xi_j^k)^V) X_k^C +$$

$$+ (\xi_i^h)^C (\xi_j^k)^C \tilde{\nabla}^{(U)}_{X_h^V} X_k^V + (\xi_i^h)^C (\xi_j^k)^V \tilde{\nabla}^{(U)}_{X_h^V} X_k^C +$$

$$+ (\xi_i^h)^V (\xi_j^k)^C \tilde{\nabla}^{(U)}_{X_h^C} X_k^V + (\xi_i^h)^V (\xi_j^k)^V \tilde{\nabla}^{(U)}_{X_h^C} X_k^C .$$

Tenendo conto che:

$$A^C(X_h^V)(\xi_j^k)^C = (A(X_h))^V (\xi_j^k)^C = (A(X_h)(\xi_j^k))^V$$

$$A^C(X_h^C)(\xi_j^k)^C = (A(X_h))^C (\xi_j^k)^C = (A(X_h)(\xi_j^k))^C$$

$$A^C(X_h^V)(\xi_j^k)^V = (A(X_h))^V(\xi_j^k)^V = 0$$

$$A^C(X_h^C)(\xi_j^k)^V = (A(X_h))^C(\xi_j^k)^V = (A(X_h)(\xi_j^k))^V$$

ed usando le (7), si ottiene

$$\tilde{\nabla}^{(U)}_{Y_i^C} Y_j^C = (\xi_i^h)^C(A(X_h)(\xi_j^k))^V X_k^V + (\xi_i^h)^V(A(X_h)(\xi_j^k))^C X_k^V +$$

$$+(\xi_i^h)^V(A(X_h)(\xi_j^k))^V X_k^C + (\xi_i^h)^C(\xi_j^k)^V(\nabla_{X_h} X_k)^V +$$

$$+(\xi_i^h)^V(\xi_j^k)^C(\nabla_{X_h} X_k)^V + (\xi_i^h)^V(\xi_j^k)^V(\nabla_{X_h} X_k)^C \quad .$$

Ma:

$$(fg)^V = f^V g^V$$

$$(fg)^C = f^C g^V + f^V g^C$$

e quindi si ottiene in definitiva:

$$\tilde{\nabla}^{(U)}_{Y_i^C} Y_j^C = (\xi_i^h A(X_h)(\xi_j^k))^C X_k^V + (\xi_i^h A(X_h)(\xi_j^k))^V X_k^C +$$

$$+(\xi_i^h \xi_j^k)^C(\nabla_{X_k} X_k)^V + (\xi_i^h \xi_j^k)^V(\nabla_{X_h} X_k)^C =$$

$$=(\xi_i^h A(X_h)(\xi_j^k)X_h)^C + (\xi_i^h \xi_j^k \nabla_{X_h} X_k)^C =$$

$$= (A(Y_i)(\xi_j^k)X_k + \xi_j^k \nabla_{Y_i} X_k)^C = (\nabla_{Y_i} Y_j)^C =$$

$$= \tilde{\nabla}^{(W)}_{Y_i^C} Y_j^C \quad .$$

In modo analogo si provano le uguaglianze:

$$\tilde{\nabla}^{(U)}_{Y_i^C} Y_j^V = \tilde{\nabla}^{(W)}_{Y_i^C} Y_j^V$$

$$\tilde{\nabla}^{(U)}_{Y_i^V} Y_j^C = \tilde{\nabla}^{(W)}_{Y_i^V} Y_j^C$$

$$\tilde{\nabla}^{(U)}_{Y_i^V} Y_j^V = \tilde{\nabla}^{(W)}_{Y_i^V} Y_j^V = 0 \quad .$$

La proposizione è così completamente provata. ∎

Osservazione 3.1.-

Mantenendo le notazioni della proposizione precedente, si ponga per semplicità:

$$\tilde{X}_i = X_i^C$$

$$\tilde{X}_{n+i} = X_i^V$$

$$\tilde{\nabla}_{\tilde{X}_A} \tilde{X}_B = \tilde{\Gamma}_{AB}^{D} \tilde{X}_B$$

dove $X_i = \dfrac{\partial}{\partial x_i}$ ; $X_i^C = \dfrac{\partial}{\partial x_i}$ ; $X_i^V = \dfrac{\partial}{\partial \dot{x}_i}$ con $i = 1,\dots,n$

$A,B,C,D = 1,2,\dots,2n$; dalle (7) si ottengono allora le uguaglianze:

$$\tilde{\Gamma}_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k \; ; \; \tilde{\Gamma}_{i\,n+j}^k = 0 ; \; \tilde{\Gamma}_{n+i\,j}^k = 0 \; ; \; \tilde{\Gamma}_{n+i\,n+j}^k = 0$$

$$\tilde{\Gamma}_{ij}^{n+k} = \dot{x}^m \frac{\partial \Gamma_{ij}^k}{\partial x^m} \; ; \; \tilde{\Gamma}_{i\,n+j}^{n+k} = 0 \; ; \; \tilde{\Gamma}_{n+i\,j}^{n+k} = 0 \; ; \; \tilde{\Gamma}_{n+i\,n+j}^{n+k} = 0 \quad .$$

Inoltre dalle (3.31) c.f.r.[7] pag. 21, si ha:

$$\tilde{A}_h^j = A_h^j \; ; \; \tilde{A}_{n+h}^j = 0 \; ; \; \tilde{A}_h^{n+j} = \dot{x}^m \frac{\partial A^j}{\partial x^m} \; ; \; \tilde{A}_{n+h}^{n+j} = A_h^j$$

dove $(A_h^j; \Gamma_{ij}^k)$ sono le componenti di $(A,\nabla)$ rispetto alla carta $(U,\phi)$ prefissata.

Osservazione 3.2.-

Poiché per ogni $X,Y \in \mathfrak{D}_1(M)$ risulta $[X^C,Y^C] = [X,Y]^C$ (c.f.r.[7] pag. 16) il tensore di torsione e l'applicazione di curvatura di $(A^c,\nabla^c)$ sono uguali rispettivamente al lift completo del tensore di torsione e dell'applicazione di curvatura di $(A,\nabla)$.

Si supponga ora che $M$ sia una varietà fogliettata e sia $(A,\nabla)$ una pseudo connessione lineare su $M$; sussiste la seguente proposizione:

Prop. 3.2. - La sottovarietà $D$ di $T(M)$ è autoparallela rispetto al lift completo $(A^c,\nabla^c)$ se e solo se $(A,\nabla)$ è fogliettata.

Dimostrazione.

In ciò che segue si suppone che gli indici $i,j,k,\ell,r,s$ variano da 1 ad $n$; $\alpha,\beta,\gamma$ da 1 ad $r$; $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$, $\bar{\gamma}$ da $r+1$ ad $n$.

Se $D$ è autoparallela rispetto ad $(A^c,\nabla^c)$ allora deve aversi:

$$(1) \qquad A^c\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) \in \mathfrak{D}_1(D)$$

$$(2) \qquad A^c\left(\frac{\partial}{\partial \dot{x}_\alpha}\right) \in \mathfrak{D}_1(D)$$

$$(3) \qquad \nabla^c_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} \in \mathfrak{D}_1(D)$$

$$(4) \qquad \nabla^c_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial \dot{x}_\alpha} \in \mathfrak{D}_1(D)$$

$$(5) \qquad \nabla^c_{\frac{\partial}{\partial \dot{x}_\alpha}} \frac{\partial}{\partial x_j} \in \mathfrak{D}_1(D)$$

$$(6) \qquad \nabla^c_{\frac{\partial}{\partial \dot{x}_\alpha}} \frac{\partial}{\partial x_\beta} \in \mathfrak{D}_1(D)$$

Essendo $A^c\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) = A_i^k \frac{\partial}{\partial x_k} + \dot{x}_j \frac{\partial A_i^h}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial \dot{x}_\ell}$ dalla (1) segue che

$$\dot{x}_\alpha \frac{\partial A_i^{\bar{\beta}}}{\partial x_\alpha} = 0.$$

Dalla (2) poiché $A^c\left(\frac{\partial}{\partial \dot{x}_\alpha}\right) = A_\alpha^c \frac{\partial}{\partial \dot{x}_\ell}$ si ha: $A_\alpha^{\bar{\beta}} = 0$

Dalla (3) poiché $\nabla^c_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} = \Gamma_{ij}^r \frac{\partial}{\partial x_r} + \dot{x}_\ell \frac{\partial \Gamma_{ij}^s}{\partial x_\ell} \frac{\partial}{\partial \dot{x}_s}$ si ha:

$$\frac{\partial \Gamma_{ij}^{\bar{\beta}}}{\partial x_\alpha} = 0$$

Dalla (4) poiché $\nabla^c_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial \dot{x}_\alpha} = \Gamma_{i\alpha}^\ell \frac{\partial}{\partial \dot{x}_\ell}$ si ha: $\Gamma_{i\alpha}^{\bar{\beta}} = 0$ .

Dalla (5) poiché $\nabla^c_{\frac{\partial}{\partial \dot{x}_\alpha}} \frac{\partial}{\partial x_j} = \Gamma_{\alpha j}^\ell \frac{\partial}{\partial \dot{x}_\ell}$ si ha $\Gamma_{\alpha j}^{\bar{\beta}} = 0.$

Dalla (6) infine risulta $\nabla^c_{\frac{\partial}{\partial \dot{x}_\alpha}} \frac{\partial}{\partial \dot{x}_\beta} = 0$

si conclude allora per la prop. 1.2 che $(A,\nabla)$ è fogliettata. In modo analogo si prova il viceversa. ∎

Dalla proposizione ora provata, dalla prop. 2.3 e dal teorema 2.1 segue immediatamente la proposizione:

Prop. 3.3.- <u>La sottovarietà</u> D <u>è autoparallela rispetto al lift completo</u> $(A^c,\nabla^c)$ <u>di</u> $(A,\nabla)$ <u>se e solo se</u> $(A,\nabla)$ <u>mantiene</u> $\mathcal{D}$ <u>parallela e la pseudo-connessione</u> $\overset{*}{\Gamma}$ <u>indotta da</u> $(A,\nabla)$ <u>sul fibrato trasverso</u> $Q = T(M)/D$ <u>è proiettabile</u>.

# B I B L I O G R A F I A

[1] R. Bott "*Lectures on characteristic classes*" Lectures Notes in Math. n. 279 Springer (1972)

[2] C.Di Comite "*Pseudoconnessioni di seconda specie su uno spazio fibrato principale*" Annali di Mat.Pura ed Appl. Serie IV Tomo IC (1974) pag. 109-142.

[3] C.Di Comite "*Sulla curvatura delle pseudoconnessioni su uno spazio fibrato principale differenziabile*" Rendic. Acc.dei XL serie IV vol. XXIV-XXV (1974) pag. 1-19.

[4] F.W.Kamber-P.Tondeur "*Foliated Bundles and characteristic classes*" Lecture Notes in Math. n. 453 Springer (1975)

[5] A.Sanini-F.Tricerri "*Connessioni e varietà fogliettate*" Coop. libr.Univ. Torinese 1977

[6] A.Sanini-F.Tricerri "*Prolungamenti di enti geometrici su una varietà fogliettata*" Rend. del Sem. Mat. dell'Univ. e Polit. di Torino vol. 34 (1975-76) pag. 1-11.

[7] K.Yano-S.Ishihara "*Tangent and cotangent bundles*" M. Dekker Inc. New York (1973).