# 4. SPAZI DI COOMOLOGIA ASSOCIATI AD UNA PSEUDOCONNESSIONE LINEARE.

In modo analogo a quanto fatto nel n.2 per le connessioni del secondo ordine di specie (0,1), si determinerà ora una successione di spazi di coomologia associata ad una pseudoconnessione lineare su $V_n$.

E' noto (cfr.[5]) che una pseudoconnessione lineare $\Gamma$ su $V_n$ é definita da una applicazione $D : X \longrightarrow D_X$ $\mathcal{F}$-lineare di $\mathcal{X}$ nell' $\mathcal{F}$-modulo delle derivazioni di $\mathcal{T} = \bigoplus_{r,s=0}^{\infty} \mathcal{T}_s^r$. Resta così determinato il seguente campo tensoriale $A$ di specie (1,1)

$$A : (f,X) \in \mathcal{F} \times \mathcal{X} \longrightarrow A(f,X) = D_X f$$

detto campo fondamentale della pseudoconnessione; si ha pertanto:

$$\forall\ f \in \mathcal{F}\ ,\ \forall\ (X,Y) \in \mathcal{X}^2 \qquad D_X(fY) = f\ D_X Y + A(f,X)Y\ .$$

Se $(U,\phi)$ é una carta locale di $V_n$ con $\phi = (x^1, \ldots x^n)$, posto $\frac{\partial}{\partial x^i} = e_i$, le funzioni $A_i^j$ e $\Gamma_{ij}^k$ così definite su $U$:

$$(D_U)_{e_i} x^j = A_i^j\ , \qquad (D_U)_{e_i} e_j = \Gamma_{ij}^k\ e_k$$

si chiamano componenti di $\Gamma$ nella carta $(U,\phi)$.

Se $K \in \mathcal{T}_s^r$, si chiama pseudodifferenziale covariante di $K$ e si indica $DK$ il campo tensoriale di specie $(r,s+1)$ definito per ogni $X_1, \ldots X_s, Y \in \mathcal{X}$ da:

$$(4.1) \qquad (DK)(X_1,\ldots,X_s,Y) = (D_Y K)(X_1,\ldots,X_s).$$

Per ogni $m > 1$ lo pseudodifferenziale covariante m-esimo $D^m K$ é definito induttivamente da

$$D^m K = D(D^{m-1}K).$$

Siano $A_j^i$ e $\Gamma_{ij}^k$ le componenti di $\Gamma$ in una carta locale $(U,\phi)$ e siano $\omega_{j_1 \ldots j_s}$ le componenti di un campo di tensori $\omega \in \mathcal{T}_s^0$ nella stessa carta, da (4.1) segue allora che le componenti $\omega_{j_1 \ldots j_s,k}$ di $D\omega$ sono:

$$(4.2)\qquad \omega_{j_1\cdots j_s,k} = A^h_k\,\partial_h\,\omega_{j_1\cdots j_s} - \sum_{\beta=1}^{s} \Gamma^h_{kj_\beta}\,\omega_{j_1\cdots h\cdots j_s}\,.$$

Si ponga per ogni $f\in\mathcal{F}$

$$\delta^1 f = df$$

e per ogni $q>1$ $\qquad \delta^q f = D^{q-1}(df)$;

in questo modo, per ogni $q\geq 1$, si é definita un'applicazione

$$\delta^q : f\in\mathcal{F} \longrightarrow \delta^q f \in \overset{0}{\mathcal{T}}_q$$

che si chiamerà <u>differenziazione covariante</u> q-esima rispetto alla pseudo connessione lineare $\Gamma$.

Indicate con $\delta_{i_1\cdots i_q} f$ le componenti di $\delta^q f$ in una carta locale $(U,\phi)$, per la (4.2) risulta ad esempio:

$$\delta_i f = \partial_i f\,;$$

$$\delta_{i_1 i_2} f = A^h_{i_2}\,\partial_{i_1 h} f - \Gamma^h_{i_2 i_1}\,\partial_h f\,;$$

$$\delta_{i_1 i_2 i_3} f = A^{h_1}_{i_3} A^{h_2}_{i_2}\,\partial_{i_1 h_1 h_2} f + (\delta^{h_1}_{i_1} A^r_{i_3}\,\partial_r A^{h_2}_{i_2} - A^{h_1}_{i_3}\Gamma^{h_2}_{i_2 i_1} - A^{h_1}_{i_2}\Gamma^{h_2}_{i_3 i_1} - \delta^{h_2}_{i_1} A^{h_1}_r \Gamma^r_{i_3 i_2})\,\partial_{h_1 h_2} f + (-A^r_{i_3}\,\partial_r \Gamma^h_{i_2 i_1} + \Gamma^k_{i_3 i_1}\Gamma^h_{i_2 k} + \Gamma^k_{i_3 i_2}\Gamma^h_{k i_1})\,\partial_h f.$$

Un campo $\omega\in\overset{0}{\mathcal{T}}_q$ si dirà <u>esatto</u> rispetto a $\delta^q$ se esiste $f\in\mathcal{F}$ tale che $\delta^q f = \omega$; ne segue che $\omega$ é esatto se e solo se esiste $f\in\mathcal{F}$ tale che, qualunque sia la carta locale $(U,\phi)$ nella quale $\omega$ abbia componenti $\omega_{i_1\cdots i_q}$, risulti :

$$(4.3)\qquad \omega_{i_1\cdots i_q} = \delta_{i_1\cdots i_q} f.$$

Un campo $\omega\in\overset{0}{\mathcal{T}}_q$ si dirà <u>chiuso</u> rispetto a $\delta^q$ se é localmente esatto, cioé se per ogni $p\in V_n$ esiste una carta locale $(U,\phi)$ di $V_n$ tale che $p\in U$ ed esiste una funzione f differenziabile in U per la quale sia verificata la (4.3).

Indicati con $E^q_\Gamma$ e con $C^q_\Gamma$ gli insiemi dei campi di tensori q-pli rispettivamente esatti e chiusi rispetto a $\Gamma$, risulta $E^q_\Gamma = \delta^q(\mathcal{F})$, ed essendo $\delta^q$ un omomorfismo $E^q_\Gamma$ é un sottospazio di $\mathcal{T}^0_q$. E' inoltre facile verificare che anche $C^q_\Gamma$ é un sottospazio di $\mathcal{T}^0_q$ e che contiene $E^q_\Gamma$.

Lo spazio quoziente $C^q_\Gamma/E^q_\Gamma = H^q_\Gamma$ si chiama <u>spazio di coomologia di</u> $V_n$ <u>rispetto a</u> $\Gamma$ <u>dei campi di tensori covarianti</u> q-pli.

Si é così costruita una successione di spazi di coomologia $\{H^q_\Gamma\}_{q\in N^+}$ di cui il primo $H^1_\Gamma$ coincide manifestamente con lo spazio di coomologia 1-dimensionale $H^1$ di De Rham e quindi é un invariante topologico di $V_n$, mentre i rimanenti sono degli invarianti di $V_n$ dipendenti dalla pseudoconnessione $\Gamma$.

Si consideri per ogni q>1 il fascio di funzioni su $V_n$ ottenuto associando ad ogni aperto A di $V_n$ lo spazio vettoriale su R $\mathcal{P}^q_A$ delle funzioni $f_A$ differenziabili in A tali che :

$$\delta^q f_A = 0 \quad \text{in } A,$$

e ad ogni coppia di aperti A e B tali che A B l'omomorfismo di restrizione $i^A_B : \mathcal{P}^q_A \dashrightarrow \mathcal{P}^q_B$ che ad ogni $f_A \in \mathcal{P}^q_A$ fa corrispondere la sua restrizione a B. Tale fascio si indicherà con $\mathcal{P}^q_\Gamma$ e si chiamerà <u>fascio delle funzioni a differenziale covariante</u> q-esimo <u>rispetto a</u> $\Gamma$ <u>nullo</u>.

Indicato con $\mathcal{H}^{q,1}_\Gamma$ lo spazio di coomologia 1-dimensionale di $V_n$ a coefficienti nel fascio $\mathcal{P}^q_\Gamma$ si dimostra in modo analogo alla Prop.1 del n.2 che: <u>per ogni</u> q>1 <u>lo spazio</u> $H^q_\Gamma$ <u>é isomorfo allo spazio</u> $\mathcal{H}^{q,1}_\Gamma$ .