

Come già detto, gli sviluppi di $S(x)$ e $1/T(x)$ si ottengono cambiando in segni + tutti i segni - delle precedenti formule.

Diamo pure uno sviluppo in serie per m , rapidamente convergente:

$$m = \sqrt{3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \frac{1}{2^{2k} (6k+1)}$$

Come già detto, ulteriori dettagli su questi argomenti verranno forniti in una pubblicazione a parte.

P A R T E II

LE FTG COME FUNZIONI DI VARIABILE COMPLESSA.

II.1 Definizione e prime proprietà.

E' evidente che, per estendere le FTG nel piano complesso, la definizione data nel § I.1 non è più applicabile. Pur tuttavia, discendendo da tale definizione le importanti proprietà differenziali espresse dal sistema (4), tale sistema può essere ora usato per la definizione delle funzioni. Quindi si assumono come $A_n(x)$, $T_n(x)$ le soluzioni del sistema: ¹⁷⁾

$$\begin{aligned} A_n' &= T_n^{n-1} \\ T_n' &= -A_n^{n-1} \end{aligned} \tag{21}$$

con opportune condizioni al contorno, in modo tale da identificare (per quanto è possibile) sull'asse reale tali funzioni con quelle già incontrate nella Parte I.

17) Si suppone sempre che l'ordine n sia reale (anche se, in linea di principio, è possibile considerare il caso di n complesso).

Se n è intero (anche negativo) il sistema (21) non presenta difficoltà interpretative.

Se n non è intero, bisogna chiarire che cosa si intende per potenza n -esima delle funzioni.

Lasciando da parte questo punto per il momento, notiamo che, per $n \neq 0$, le (21) implicano una relazione del tipo (da ora in poi si eliminerà l'indice delle funzioni quando non è strettamente necessario)

$$A^n + T^n = \text{cost.} \quad (22)$$

Le FTG vengono definite imponendo uguale a 1 la costante che figura nella (22). Per $n > 0$, si può assumere quindi la condizione al contorno $A(0) = 0, T(0) = 1$. Per $n < 0$ questa scelta non è più possibile, e bisogna farne un'altra. Una possibile condizione al contorno potrebbe essere $A(0) = T(0) = 2^{-1/n}$ (reale > 1): tuttavia in generale il problema degli n non interi positivi sembra avere un interesse limitato, e in questo lavoro verrà discusso solo marginalmente.

A questo punto è bene aggiungere che, cambiando il segno - in segno + nella seconda delle (21), si possono definire in modo del tutto analogo le funzioni iperboliche generalizzate (FIG) Ah_n, Th_n , attraverso il sistema

$$\begin{aligned} Ah' &= Th^{n-1} \\ Th' &= Ah^{n-1} \end{aligned} \quad (23)$$

L'analogia della (22) (per $n \neq 0$)¹⁸⁾ è data da

18) Nel caso (sinora escluso) di $n=0$, la (22) e la (24) si sostituiscono con $A_0 T_0 = \text{cost}, Ah_0/Th_0 = \text{cost}$. Ponendo queste costanti uguali a 1, e assumendo le condizioni al contorno $A_0(0) = T_0(0) = Ah_0(0) = Th_0(0) = 1$, si trova $A_0 = e^x, T_0 = e^{-x}, Ah_0 = Th_0 = \sqrt{2x+1}$. E' questo l'unico caso (del resto, di scarso interesse) in cui le FTG e le FIG dello stesso ordine non sono riconducibili le une alle altre nel piano complesso (v. più avanti).

$$Th^n - Ah^n = \text{cost.} = 1 \quad (24)$$

Le condizioni al contorno per $n > 0$ saranno le stesse che per A e T $n < 0$ andranno specificate in modo opportuno.

Come già menzionato, per n non intero è necessario specificare il significato delle elevazioni a potenza che figurano nelle formule (21) e (22). Per n positivo, si sceglie tale specificazione in modo che, nell'intervallo dell'asse reale $0 < x < m$ (in cui sia A che T risultano reali e positivi), anche le loro elevazioni a potenza diano un risultato reale e positivo. Anche per n negativo, pur non essendo applicabile la definizione data nella Parte I, può essere utilizzato tale criterio in un opportuno intervallo dell'asse x intorno a $x = 0$.¹⁹⁾

I casi di n non intero positivo più interessanti sono chiaramente quelli di n razionale. In tali casi si può dimostrare che, conoscendo le funzioni A_n, T_n con n intero e positivo, è possibile determinare la soluzione del problema con $n = p/q$ attraverso un processo di quadratura e di inversione. (p, q sono entrambi interi: si suppone $p > 0$, mentre q può essere anche negativo). Si ponga infatti

$$\begin{aligned} A_n(x) &= [A_p(\phi)]^q \\ T_n(x) &= [T_p(\phi)]^q \end{aligned} \quad (25)$$

Con le prescrizioni date precedentemente, la (22) è soddisfatta. Inserendo le espressioni (25) nel sistema (21) si ottiene

$$q[A_p(\phi)T_p(\phi)]^{q-1}d\phi = dx \quad (26)$$

19) Per le FIG con $n > 0$, il discorso si può ripetere esattamente. Per le FIG con $n < 0$, occorre specificare prima le condizioni al contorno compatibili con la (24).

La (26) si integra con la condizione al contorno $\phi(x_0) = \phi_0$ (per $q > 0$, $x_0 = \phi_0 = 0$):

$$q \int_{\phi_0}^{\phi} [A_p(\phi') T_p(\phi')]^{q-1} d\phi' = x - x_0 \quad (27)$$

La (27) definisce una funzione $x(\phi)$, che può essere invertita in modo da ottenere la $\phi(x)$; sostituendo quest'ultima espressione nella (25) si vede come, in linea di principio, la conoscenza delle FTG con n intero positivo permetta di risalire a tutte le FTG con n razionale (anche se in pratica il procedimento, e in particolare l'inversione della $x(\phi)$, possono creare difficoltà).²⁰⁾

Come esempio, mostriamo un caso in cui l'applicazione del metodo è piuttosto diretta, corrispondente a $n=-2$, $p=2$, $q=-1$. Con le condizioni al contorno prima accennate ($A_{-2}(0) = T_{-2}(0) = \sqrt{2}$) si ottiene

$$\begin{aligned} A_{-2}(x) \\ T_{-2}(x) \end{aligned} = \sqrt{\frac{2\sqrt{4+x^2}}{\sqrt{4+x^2} + x}}$$

Le funzioni presentano due punti di diramazione in $x = \pm 2i$ (ove esse si annullano), da cui si possono far partire due tagli che arrivano fino all'infinito lungo l'asse immaginario. Attraversando un taglio da sinistra a destra la funzione A_{-2} passa da un valore reale a uno immaginario puro. Le due funzioni vanno l'una nell'altra sotto lo scambio $x \rightarrow -x$.

Anche se l'inversione della (27) non è effettuabile in modo diretto, i punti di singolarità della funzione $\phi(x)$ sono immediatamente determinati attraverso la condizione

20) E' chiaro che lo stesso procedimento è applicabile alle FIG con n razionale.

$$[A_p(\phi) T_p(\phi)]^{q-1} = 0 \quad (27')$$

Trovati i valori di ϕ che soddisfano questa relazione, si inseriscono nella (27) e si trovano i corrispondenti valori di x . Per n positivo non intero ($q > 1$) è confermato che il punto $x=0$ è sempre un punto di singolarità per le FTG. Sono anche punti di singolarità di $\phi(x)$ tutti gli x soddisfacenti la condizione $\phi(x) = m_p$; inserendo questa equazione nelle (25), si vede subito che (sempre per n positivo) tale classe comprende certamente il punto $x = m_n$ (oltre eventualmente ad altri), che quindi è, come già fatto notare nella Parte I, un punto di singolarità delle funzioni. Naturalmente in generale le singolarità di $\phi(x)$ non sono le sole singolarità delle FTG di ordine non intero: ad esse vanno aggiunte le eventuali singolarità di A_p e T_p .

II.2. Le singolarità delle FTG di ordine intero positivo.

Data la particolare importanza rivestita dalle funzioni con n intero e positivo, cerchiamo di ricavare delle indicazioni sulla natura delle loro singolarità; e, in particolare, vediamo di determinare come si comportano tali funzioni nelle vicinanze di quei punti (se ne esistono), che indicheremo con x_0 , nei quali esse divergono con un andamento a potenza. Poiché chiaramente la (22) deve mantenersi valida come limite anche quando $x \rightarrow x_0$, ne segue che in tale limite entrambe le funzioni A e T de vo no div er g e r e, e devono divergere nella stessa maniera. Più precisamente, se è verificata la relazione

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (x-x_0)^p T(x) = K$$

ove p è un numero reale positivo e K una costante finita e non nulla, si deve anche avere

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (x-x_0)^p A(x) = nK$$

ove n è una radice n -esima di -1 . Se p è intero, le formule preceden

ti non presentano ambiguità. Se p non è intero (cioè se il punto x_0 è un punto di diramazione) i limiti soprariportati hanno senso soltanto se si specifica la struttura dei tagli e i valori lungo di essi delle funzioni che vi figurano. Per quanto riguarda A e T , questo non è un problema: dagli esempi che verranno trattati in seguito si vedrà che la struttura dei tagli (la stessa per le due funzioni) e il valore di A e T lungo essi sono praticamente fissati dalle proprietà di simmetria che si vuole siano soddisfatte dalle FTG. Invece per $(x-x_0)^p$ non c'è nessun criterio che possa fissare a priori quale valore debba assumere tale funzione nelle vicinanze degli stessi tagli: se p.es. p è della forma $1/r$ (con r intero) per ogni singolarità x_0 vi saranno r caratterizzazioni possibili di $(x-x_0)^p$ e quindi r valori distinti di K , che vanno l'uno nell'altro per moltiplicazione per una radice r -esima dell'unità.

Con queste premesse, determiniamo i valori di p e K . Per x sufficientemente prossimo a x_0 , nel sistema (21) si può sostituire T con $K(x-x_0)^{-p}$ e A con $\eta K(x-x_0)^{-p}$, ottenendo per le quantità suddette le espressioni seguenti:

$$p = \frac{1}{n-2} \quad K = \left[\frac{-\eta}{n-2} \right]^{\frac{1}{n-2}} \quad (28)$$

Dalle (28) si apprende che, affinché le FTG di ordine intero positivo abbiano al finito delle singolarità di questo tipo, deve essere $n > 2$. Per le funzioni di ordine 3 ci si aspettano dei poli semplici, con residuo K per T ed ηK per A ; per quelle di ordine 4 dei punti di diramazione di tipo radice quadrata, e così via. Si vede che per la seconda delle (28) i possibili valori di K sono $n(n-2)$: si hanno infatti n scelte distinte per η , e $(n-2)$ modi di estrarre la radice $(n-2)$ -esima nella seconda delle (28). Come detto in precedenza, per $n > 3$ questi $(n-2)$ valori di K sono tutti associabili alla stessa singolarità, mentre invece il valore di η (che non è arbitrario, in quanto corrisponde al valore

di $S(x_0)$) può servire a "distinguere" tra le varie singolarità.

Lo stesso risultato, sostituendo n con e =radice n -esima di 1, e togliendo il segno meno nella seconda delle (28), si ha per le FIG. E' chiaro che il ragionamento fatto non garantisce che le singolarità trovate esistano effettivamente, e non esclude che vi siano singolarità di tipo diverso (divergenti a potenza con un valore minore di p , e sovrapposte alle singolarità dominanti; oppure punti di diramazione in cui le funzioni non divergono, situati in qualunque punto del piano complesso).

Nei casi di FTG esplicitamente studiati in questo lavoro ($n=3,4,6$) si troveranno le singolarità dominanti di A e T previste dal ragionamento precedente, ma per $n=6$ si troveranno anche alcune singolarità aggiuntive, dei tipi sopradescritti, sia in A e T che in S (funzione che, per $n=4$, non ha punti di diramazione, e invece li acquista per $n=6$). Quanto ai valori possibili per n , si trova che nei casi studiati essi sono tutti presenti. Una conclusione generale valida per n qualsiasi sembra piuttosto difficile da raggiungere.

Pur con le opportune cautele nella definizione delle funzioni, è chiaro che il discorso precedente si può estendere anche ai valori di n non intero ^{21),22)}. Le FTG con n positivo < 2 , che per il ragionamento visto non possono divergere al finito, devono allora divergere all'infinito, se non altro lungo un cammino particolare (per le funzioni con n razionale con numeratore e denominatore dispari, come mostrato nel § I.1, ciò avviene lungo l'asse reale). Lo stesso ragionamento può essere dunque ripetuto supponendo che per $x \rightarrow \infty$ lungo una certa direzione la funzione T diverga come $K x^p$. Di nuovo si trova un risultato del tipo (28), con $2-n$ al posto di $n-2$: tale risultato trova conferma immediata per le FTG

21) A questo proposito dovrebbe essere interessante lo studio delle funzioni di ordine $\frac{5}{2}, \frac{7}{3}, \frac{9}{4}, \dots$, per cui ci si aspetta di trovare dei poli di ordine 2,3,4.....

22) Si noti che per n non intero si hanno altre singolarità non divergenti nei punti $x=0, x=m$ e simili, come mostrato alla fine del precedente paragrafo.

con $n=1$ (eq.(7)). Nel caso limite $n=2$ la prima delle (28) mostra che le singolarità (ovunque esse siano) devono essere singolarità essenziali, con una divergenza più forte che qualsiasi andamento a potenza: il che è confermato dal noto andamento di $\sin x, \cos x$ lungo l'asse immaginario.

Per n negativo il ragionamento precedente non si può estendere perché non è più vero che la divergenza di una funzione implica la divergenza dell'altra. Il procedimento può invece essere applicato agli zeri delle funzioni: imponendo che $\lim_{x \rightarrow x_0} (x-x_0)^{-p} T(x) = K$ (con $p > 0$) si ottiene $p = \frac{1}{2-n}$, e di nuovo questo risultato trova riscontro nel caso precedentemente trattato delle funzioni di ordine -2 , in cui gli unici zeri delle funzioni sono punti di diramazione di tipo radice quarta.

II.3. Proprietà di simmetria delle FTG di ordine intero e positivo.

Per discutere questo argomento è necessario far notare preliminarmente che il sistema differenziale (21), quando n è intero e positivo, soddisfa, nelle vicinanze del "punto iniziale" $x=0$, la condizione di Lipschitz che garantisce l'unicità della soluzione. (Lo stesso discorso si può ripetere per il sistema (23) che definisce le FIG.) Quindi, se si trovano due soluzioni che soddisfano la (21) con la stessa condizione al contorno, le due soluzioni devono coincidere, cioè di fatto rappresentano la stessa coppia di funzioni.

Questo fatto può essere sfruttato per dimostrare un'importante proprietà di simmetria delle FTG (e delle FIG) con n intero positivo. Detto $e = e^{2\pi i \frac{k}{n}}$ ($k=0,1,\dots,n-1$) una radice n -esima dell'unità, consideriamo le due funzioni $\hat{A}(x) = \frac{1}{e} A(ex)$, e $\hat{T}(x) = T(ex)$. E' immediato verificare che tali funzioni verificano la (21), la (22) (con la costante uguale a 1), e la condizione al contorno $\hat{A}(0) = 0$, $\hat{T}(0) = 1$. Per quanto detto, si potrà quindi identificare

$$\begin{aligned} A(\epsilon x) &= \epsilon A(x) \\ T(\epsilon x) &= T(x) \end{aligned} \tag{29}$$

Poiché nel piano complesso la moltiplicazione per $e^{2\pi i \frac{k}{n}}$ equivale a una rotazione di un angolo di $\frac{2\pi k}{n}$ del raggio vettore, si vede che le FTG (e analogamente le FIG), una volta conosciute nel settore del piano complesso delimitato dai raggi vettori corrispondenti agli argomenti $\phi = 0$ e $\phi = \frac{2\pi}{n}$, si possono estendere, attraverso le (29), all'intero piano. In particolare, lungo tutti i raggi vettori determinati da $\phi = \frac{2\pi k}{n}$ le funzioni replicano (a meno di una moltiplicazione di A per ϵ .) i valori assunti sul semiasse reale positivo²³⁾. Se n è pari, ne segue immediatamente che sull'asse reale A è dispari e T è pari (come risulta anche dalla definizione data nella Parte I). Se n è dispari, invece i valori sul semiasse reale negativo non sono semplicemente legati a quelli assunti nel semiasse reale positivo, e vengono replicati lungo i raggi vettori che bisecano i settori già considerati (determinati da $\phi = \frac{\pi r}{n}$, con $r =$ intero dispari minore di $2n$).

Un ragionamento analogo può essere utilizzato per trovare il legame più generale tra FTG e FIG. Chiamando η una radice n -esima di -1 ($\eta = e^{\frac{i\pi(2k+1)}{n}}$, $k = 0, 1, \dots, n-1$), e considerando le funzioni

$$\begin{aligned} A_h(x) &= \frac{1}{\eta} A(\eta x) \\ T_h(x) &= T(\eta x) \end{aligned} \tag{29'}$$

si vede subito che tali funzioni soddisfano il sistema (23), la relazione (24) e le condizioni al contorno $A_h(0) = 0, T_h(0) = 1$, e possono esse-

23) Questa conclusione non vale per i coefficienti K definiti dalla (28), e in particolare per i residui dei poli quando $n=3$, perché per tali quantità si ottiene una relazione diversa dalla (29).

re quindi identificate con le FIG. Poiché il rapporto tra due qualsiasi delle η è sempre una delle ϵ (radici n -esime dell'unità), le condizioni (29) mostrano che la scelta del valore di η è irrilevante: tutti i valori conducono alle stesse funzioni. Si può quindi scegliere sempre $\eta = -1$ per n dispari, $\eta = i$ per n pari della forma $4k+2$ (per $n = 4k$ non c'è nessun valore di η che si raccomandi particolarmente), ottenendo:

$$\begin{aligned} Ah(x) &= -i A(ix) & Ah(x) &= -A(-x) \\ Ah(x) &= T(ix) \quad (n \text{ pari}=4k+2) & Th(x) &= T(-x) \quad (n \text{ dispari}) \end{aligned} \quad (30)$$

Le prime due equazioni (30) riproducono per $n = 2$ il noto legame tra funzioni trigonometriche e iperboliche, mentre le ultime due equazioni (30) nel caso $n=3$ forniscono il risultato già citato nel § I.3 (nota ¹³).

Un'ultima considerazione da fare, suggerita dal trattamento svolto nel campo reale, riguarda l'ipotesi che certe FTG siano periodiche lungo l'asse reale con periodo P . Il ragionamento precedente mostra che le funzioni $A(x+P), T(x+P)$, soddisfacendo il sistema (21) con le stesse condizioni al contorno, si possono identificare con $A(x)$ e $T(x)$; ossia P è un effettivo periodo delle funzioni. C'è ora da chiedersi come l'esistenza di un periodo reale P sia conciliabile con le relazioni (29): escludendo i casi banali $n=1$ e $n=2$, per cui la (29) non è significativa, si vede che una funzione periodica soddisfacente le condizioni (29) deve necessariamente avere nel piano complesso una simmetria del tipo di quella di un pavimento piastrellato con poligoni regolari, in numero di n intorno ad ogni vertice (per brevità, tale tipo di simmetria verrà chiamato "simmetria pavimentale"). È evidente che tale simmetria può essere ottenuta solo per $n = 3, 4$ e 6 (corrispondentemente a una pavimentazione con esagoni regolari, quadrati e triangoli equilateri): solo in questi casi sarà possibile rappresentare in un solo

foglio del piano complesso le funzioni e le loro singolarità in modo da avere la periodicità e le relazioni (29) soddisfatte. Ma in tale caso le funzioni avranno certamente anche un secondo periodo non reale: quindi si tratterà di funzioni ellittiche (anzi, di funzioni ellittiche di tipo particolare, soddisfacenti le relazioni (29)).

Per gli altri valori di n , la periodicità e la simmetria per rotazione non sono compatibili tra loro su un solo foglio del piano complesso, e potranno essere mantenute simultaneamente solo sulla superficie di Riemann delle funzioni, certamente a più fogli e di struttura complicata. Infatti è da ricordare che, come visto nel paragrafo precedente, le funzioni di ordine > 3 hanno dei punti di diramazione di molteplicità sempre più alta al crescere di n . E' chiaro che in tali casi, se si impone p.es. la condizione (29) con un'opportuna struttura dei tagli sul primo foglio della superficie di Riemann, nell'imporre la periodicità in un punto qualsiasi si verrà ad incontrare uno di tali tagli e si dovrà quindi necessariamente passare su di un altro foglio. Lo studio di tali funzioni diviene quindi notevolmente complicato, e presenta anche parecchie varianti: un'idea della complessità del problema può essere data dalle poche considerazioni di tipo introduttivo che verranno svolte nel § II.8 a proposito delle funzioni di ordine 5. Si potrebbe obiettare che anche le funzioni di ordine 4 e 6 presentano un'infinità di punti di diramazione, e quindi una superficie di Riemann complicata; tuttavia in tali casi è possibile scegliere i tagli nel primo foglio della superficie di Riemann in modo da mantenere ivi sia la periodicità che le relazioni (29); e in ogni caso l'espressione esplicita di tali funzioni in termini di funzioni ellittiche, che verrà data nel prosieguo di questo lavoro, è sufficiente a risolvere com-

pletamente tutti i problemi al proposito.^{24),25)}

II.4 Le FTG di ordine 3.

A questo punto conviene abbandonare la trattazione delle proprietà generali delle FTG per studiare in dettaglio i casi particolari di maggior interesse, che, come già detto, corrispondono a $n = 3, 4$ e 6 , per cui le FTG risultano legate a particolari tipi di funzioni ellittiche. Cominciamo a trattare il caso $n=3$, per cui è già stato fatto nel § I.3 uno studio delle proprietà sull'asse reale.

Le proprietà principali delle funzioni ellittiche (sia nella versione delle funzioni di Weierstrass che di quelle di Jacobi) si suppongono note: il lettore le troverà comunque esaurientemente descritte nel già menzionato libro di F. TRICOMI, Funzioni ellittiche, Ed. Zanichelli (1951).

-
- 24) Un'obiezione analoga, a livello elementare, potrebbe essere fatta per la funzione $\sqrt{\sin x}$ che pure presenta un'infinità di punti di diramazione in $x = n\pi$; tuttavia, scegliendo i tagli p.es. dal punto $(2n-1)\pi$ al punto $2n\pi$ (per ogni n), si può mantenere una struttura periodica della funzione su tutto il primo foglio della superficie di Riemann.
- 25) Si può mostrare che solo per $n = 3, 4$ e 6 si può avere la periodicità P e le relazioni (29) sullo stesso foglio del piano complesso anche notando che, in conseguenza di ciò, qualunque valore αP , ove α è un'arbitraria combinazione lineare a coefficienti interi delle radici n -esime dell'unità, è un periodo delle funzioni (questo si dimostra con applicazioni ripetute delle proprietà postulate). Ma è noto (v. libro di F. TRICOMI, Funzioni ellittiche, Zanichelli (1951)) che una funzione su un piano non può avere più di due periodi indipendenti. Per $n = 3, 4, 6$ si può controllare che qualunque scelta di α può essere ricondotta ad un'espressione del tipo $\alpha = p+q e^{i \frac{2\pi}{n}}$ (p, q interi) mentre ciò non è più vero per gli altri valori di n . Quindi le FTG con $n=3, 4, 6$ sono effettive funzioni a due periodi, e possono essere definite su un piano, mentre per gli altri valori di n si avrebbe un numero maggiore di periodi indipendenti, richiedente una definizione su una superficie di Riemann a più fogli.

In questo lavoro verrà sistematicamente impiegata, in riferimento alle funzioni ellittiche, la notazione usata in detto libro.

Poiché le FTG di ordine 3 sono convenientemente espresse dalle funzioni di Weierstrass $\wp(u)$,²⁶⁾ è bene richiamare alcune formule-base relative alla $\wp(u)$, soprattutto per comodità d'uso nei passaggi che si incontreranno più avanti. Una funzione ellittica di Weierstrass è una funzione doppiamente periodica, che presenta dei poli di 2° ordine in tutti i vertici di un opportuno reticolo di parallelogrammi, includente il punto $u=0$. La funzione $\wp(u)$ è univocamente determinata una volta specificati due parametri g_2 e g_3 (detti "invarianti"), che figurano nella relazione che connette il valore della funzione a quello della sua derivata $\wp'(u)$:

$$\wp'(u)^2 = 4\wp(u)^3 - g_2\wp(u) - g_3 \quad (31)$$

Se si vogliono specificare esplicitamente nella $\wp(u)$ i valori degli invarianti, si scriverà $\wp(u|g_2, g_3)$.

Un'altra formula fondamentale è la relazione di omogeneità, che di fatto riduce a uno solo il parametro addizionale da cui dipende la $\wp(u)$:

$$t^2\wp(tu|t^{-4}g_2, t^{-6}g_3) = \wp(u|g_2, g_3) \quad (32)$$

La $\wp(u)$ è una funzione pari, mentre la $\wp'(u)$ è una funzione dispari. Seguendo TRICOMI, i periodi primitivi della $\wp(u)$ (cioè quelli di minore modulo) saranno indicati con $2\omega_1$ e $2\omega_3$, mentre si utilizzerà il simbolo ω_2 per la loro semisomma $\omega_1 + \omega_3$. (Chiaramente tali grandezze sono funzioni di g_2 e g_3). Il valore $\wp(\omega_i)$ è chiamato e_i ($i=1,2,3$): in tali punti $\wp'(u)$ si annulla, così che la (31) può anche essere scritta:

26) Secondo la notazione corrente, l'argomento delle funzioni di Weierstrass è indicato con una delle lettere u, v, w, \dots

$$\wp'^2 u = 4(\wp u - e_1)(\wp u - e_2)(\wp u - e_3)$$

e la determinazione di e_1, e_2, e_3 (detti anche "invarianti irrazionali") a partire da g_2 e g_3 è ricondotta alla soluzione dell'equazione di terzo grado $4y^3 - g_2 y - g_3 = 0$. Tale equazione, se g_2 e g_3 sono reali (e questa è l'unica situazione che verrà presa in considerazione in questo lavoro), può avere tre soluzioni reali (quando il discriminante $\Delta = g_3^2 - g_2^3/27$ è < 0) o una soluzione reale (sempre e_2) e due complesse coniugate (quando $\Delta > 0$)²⁷⁾. Come vedremo più avanti, a questi due tipi di funzioni saranno legati diversi tipi di FTG.

E' utile ricordare che la funzione $\wp u - e_i$ presenta, in $u = \omega_i$, uno zero doppio.

Dalla (31) si vede immediatamente che la derivata della funzione inversa della $\wp u, \wp^{-1} u$ (che è una funzione a due valori in ogni campo fondamentale)²⁸⁾, è data da

$$\frac{d}{du} \wp^{-1} u = \pm \frac{1}{\sqrt{4u^3 - g_2 u - g_3}} \quad (33)$$

Il confronto della (33) con la (19) mostra immediatamente che la funzione $-AT(-x)$ si può identificare con $\wp(u | 0, -1)$, in cui u è un'opportuna funzione lineare di x (che determineremo). Ma ancora più interessante è il confronto della (33) con una formula simile alla (20)

27) Il segno del discriminante qui definito è opposto a quello dato nel TRICOMI. Come è mostrato in tale testo, i casi in cui si ha $\Delta=0$ corrispondono a "funzioni ellittiche degeneri" costruite (quando g_2, g_3 non sono nulli) attraverso funzioni trigonometriche o iperboliche: inoltre si ha $\wp(u | 0, 0) = 1/u^2$.

28) Seguendo TRICOMI, verrà chiamato campo fondamentale della $\wp u$ un parallelogramma che ha per lati due periodi primitivi, o una zona del piano complesso ad esso equivalente (per la definizione precisa, si veda il testo citato).

riguardante la funzione inversa di $1/(A+T)$:

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arc} \frac{1}{A+T}(x) = \pm \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4x^3-1}} \quad (34)$$

In tal caso la funzione $\frac{1}{A+T}(x)$ si può identificare con $\mathcal{P}(u|0,1)$, in cui di nuovo \underline{u} è un'opportuna funzione lineare di x .

E' da notare che, attraverso la formula di omogeneità (32), le due funzioni $\mathcal{P}(u|0,1)$ e $\mathcal{P}(u|0,-1)$ sono riconducibili alla stessa funzione, previa una rotazione di 90° nel piano complesso e un cambiamento di segno:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(u|0,1) &= -\mathcal{P}(iu|0,-1) \\ \mathcal{P}(u|0,-1) &= -\mathcal{P}(iu|0,1) \end{aligned} \quad (35)$$

La funzione ellittica legata alle FTG di ordine 3 è dunque quella di tipo equianarmonico, caratterizzata da $g_2 = 0$; per la relazione di omogeneità (32) i valori di g_3 sono tutti equivalenti, e verrà quindi generalmente considerato il caso $g_3 = 1$ (anche se, occasionalmente, ci si riferirà al caso con $g_3 = -1$).

Nell'indicazione degli invarianti della $\mathcal{P}u$, in questo paragrafo da ora in poi g_2 verrà omissa.

La Fig. 4 mostra una rappresentazione della $\mathcal{P}(u|1)$ e della sua derivata $\mathcal{P}'(u|1)$ nel piano complesso, ottenuta indicando il valore della funzione solo in alcuni punti significativi, di maggior interesse per lo studio delle FTG, ma che tuttavia permettono di farsi un'idea dell'andamento generale delle funzioni. La $\mathcal{P}(u|1)$ è una funzione ellittica con $\Delta > 0$, e i valori di e_1, e_2, e_3 sono dati da $2^{-2/3}$ moltiplicato per le radici cubiche dell'unità. Anche i periodi primitivi sono complessi coniugati, e un campo fondamentale è un rombo ottenuto dalla sovrapposizione di due triangoli equilateri (in Fig. 4 i campi fondamentali sono delimita-

ti da linee più marcate). Dalla stessa figura si può constatare che il periodo immaginario (non primitivo) della $\wp(u|1)$ è maggiore in modulo per un fattore $\sqrt{3}$ del periodo reale (anch'esso non primitivo). Inoltre la $\wp(u|1)$ e la $\wp'(u|1)$ godono di una proprietà analoga a quella espressa dalle relazioni (29) per le funzioni A e T (con $e = \underline{ra}$ dice cubica dell'unità):

$$\begin{aligned} \wp(\epsilon u) &= \epsilon \wp u \\ \wp'(\epsilon u) &= \wp' u \end{aligned} \tag{36}$$

Per la connessione con le FTG è necessario vedere come si comporta la $\wp u$ nei punti che dividono i periodi in tre parti: a questo scopo (anticipando quelle che saranno le conclusioni del ragionamento) indichiamo con $3m$ il periodo immaginario e con $3m/\sqrt{3} = \sqrt{3} m$ il periodo reale della $\wp(u|1)$. È immediato verificare che nei punti $\frac{m}{\sqrt{3}}$ e $\frac{2m}{\sqrt{3}}$ $\wp u$ vale 1 mentre $\wp' u$ vale rispettivamente $\mp\sqrt{3}$ e nei punti im e $2im$ $\wp u$ vale zero (e $\wp' u$ vale rispettivamente $\mp i$). Il risultato si ottiene ricordando che i valori assunti dalla funzione studiata a $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{3}$ del periodo reale o immaginario devono essere uguali (per la simmetria rispetto al punto ω_2), e sfruttando la formula di duplicazione della $\wp u$, che per le $\wp u$ equianarmoniche si scrive:

$$\wp(2u) = 9 \frac{\wp^4 u}{\wp'^2 u} - 2\wp u = \frac{\wp u (\wp^3 u + 2g_3)}{\wp'^2 u} \tag{37}$$

L'equazione $\wp(2u) = \wp u$ ha come soluzione $\wp u = 0$ e $\wp u = g_3^{1/3}$ (3 valori).

Ricordando che la $\wp(u|1)$ non si può annullare sull'asse reale (perché $e_2 > 0$), mentre la $\wp(u|-1)$ si deve annullare (perché $e_2 > 0$), si arriva al risultato enunciato. (È chiaro che le altre due soluzioni complesse coniugate corrispondono ai punti che dividono in tre parti uguali i due periodi primitivi).

Nella Fig. 4 sono state riportate quindi le rette, parallele ai \underline{pe} riodi primitivi, che dividono in tre parti uguali i periodi sull'asse reale e immaginario. Dalle proprietà descritte sopra è possibile determinare immediatamente il valore assunto dalla Φ_u (e dalla Φ'_u) in tutte le intersezioni di tali rette. Per la Φ_u si vede che tali punti sono tutti e soli quelli in cui la funzione ha un polo, uno zero o vale una radice cubica dell'unità.

A questo punto si possono enunciare le formule che esprimono le FTG in termini di una delle Φ_u equianarmoniche. Ci sono diversi modi di scrivere tali relazioni.

Come già detto, identificando la (33) con la (19) e sfruttando la pa rità della Φ_u si ha:

$$\begin{aligned} AT(x) &= -\Phi(x+m|-1) = \Phi(i(x+m)|1) \\ A^3(x) - T^3(x) &= \Phi'(x+m|-1) = -i\Phi'(i(x+m)|1) \end{aligned} \tag{38}$$

La seconda delle (38) è stata ottenuta per derivazione. Ponendo $x=0$ oppure $x=m$ nelle (38) si vede che la costante m caratteristica delle FTG di ordine 3 si identifica con la terza parte del perio do reale della $\Phi(u|-1)$ (o, equivalentemente, con la terza parte del modulo del periodo immaginario della $\Phi(u|1)$).

Dalla seconda delle (38) si ricava immediatamente

$$\begin{aligned} A^3(x) \\ T^3(x) \end{aligned} = \frac{1}{2} (1 \pm \Phi'(x+m|-1)) \tag{39}$$

Da questa formula si ottengono A e T estraendo la radice cubica. Non vi sono punti di diramazione, perché tutti gli zeri e i poli del secondo membro della (39) sono di terz'ordine. Tuttavia una formula con tenente radici cubiche è poco pratica per le applicazioni. Conviene allo ra partire dalla (34), che, confrontata con la (33), fornisce immedia-

tamente

$$\frac{1}{A+T}(x) = \mathcal{P} \left(\frac{x+m}{\sqrt{3}} \mid 1 \right) \quad (40)$$

$$\sqrt{3} \frac{A-T}{A+T}(x) = \mathcal{P}' \left(\frac{x+m}{\sqrt{3}} \mid 1 \right)$$

La seconda di queste formule è stata ottenuta per derivazione. Combinando le (40), si ottiene $[u(x+m)/\sqrt{3}]$:

$$\frac{A(x)}{T(x)} = \frac{1}{2\mathcal{P}(u \mid 1)} \left[1 \pm \frac{\mathcal{P}'(u \mid 1)}{\sqrt{3}} \right] \quad (41)$$

Le (41) sono formule particolarmente semplici, che permettono, sulla base dei risultati esposti in precedenza relativamente al comportamento della $\mathcal{P}(u \mid 1)$, di determinare immediatamente i valori delle FTG in tutti i punti del reticolo triangolare mostrato in Fig.4. Il risultato è riportato in Fig. 5. Si noti l'interessante simmetria pavimentale presentata da tutte le funzioni: se si fa corrispondere al piano complesso un pavimento piastrellato con esagoni regolari di tre colori diversi che non si tocchino (la cui distanza tra i centri corrisponde a $\frac{1}{3}$ del periodo delle funzioni), i centri delle piastrelle dello stesso colore si identificheranno rispettivamente con gli zeri delle funzioni, i loro poli (semplici) e i punti in cui le funzioni valgono una radice cubica dell'unità. Si noti anche che la simmetria pavimentale delle funzioni di Fig. 5 non è la replica della simmetria dello stesso tipo suggerito dalle formule (36), e che si manifesta nei diagrammi di Fig. 4; infatti quest'ultimo caso, nell'immagine descritta qui sopra, corrisponde ad un pavimento di esagoni di dimensioni tre volte più grandi e, per così dire, dello stesso colore (cioè, centrati tutti nei poli delle funzioni). Le funzioni sono reali lungo le rette indicate con R in Fig. 5, e su tutte le rette ad esse parallele e passanti per i punti ove si ha il valore

1 (-1 per S).

Dalle formule (41) si possono nuovamente ottenere tutte le proprietà caratteristiche delle FTG di ordine 3: è immediato verificare la relazione $A^3 + T^3 = 1$, e il sistema differenziale (14). Anche le formule collegative possono essere dedotte dalle (41), ma in maniera tutt'altro che immediata: si deve sfruttare la formula di addizione della Φ_u , che vale per qualunque scelta di g_2 e g_3 :

$$\Phi(u+v) = \frac{1}{4} \left(\frac{\Phi'_u - \Phi'_v}{\Phi_u - \Phi_v} \right)^2 - \Phi_u - \Phi_v \quad (42)$$

Ponendo (come prima) $u = (x+m/\sqrt{3})$ e $v = -2m/\sqrt{3}$, e sfruttando la parità delle funzioni Φ e Φ' , si ottiene (è sottinteso che si prende il caso $g_3 = 1$).

$$\frac{A(-x)}{T(-x)} = \frac{1}{2\Phi(u+v)} \left[1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \Phi'(u+v) \right] \quad (43)$$

Dalla (42), inserendo esplicitamente i valori di Φ_v e Φ'_v , e svolgendo alcuni passaggi, si può ottenere la seguente espressione:

$$\Phi(u+v) = \frac{2\Phi^2 u + 2\Phi u - 1 + \sqrt{3} \Phi' u}{2(\Phi u - 1)^2}$$

da cui, derivando rispetto a u

$$\Phi'(u+v) = - \frac{3\Phi u \Phi' u + \sqrt{3}(\Phi^3 u + 3\Phi^2 u - 1)}{(\Phi u - 1)^3}$$

L'inserzione delle formule precedenti nelle (43) riproduce, dopo calcoli piuttosto macchinosi, le relazioni (12) e (13) [in cui ovviamente $A(x)$ e $T(x)$ sono espressi mediante le (41)].

Una volta stabilite le formule collegative, esse possono venire usate per effettuare opportune traslazioni sulla variabile x nelle equazioni da (39) a (41), in modo da ottenere altri interessanti modi di legare le FTG di ordine 3 alle Φ_u equianarmoniche. Si ottengono p.es. le seguenti

relazioni:

$$\frac{T}{A^2}(x) = \Phi(x|-1); -\frac{T^3(x)+1}{A^3(x)} = \Phi'(x|-1) \quad (44)$$

$$\frac{A}{T^2}(x) = \Phi(x+2m|-1); \frac{A^3(x)+1}{T^3(x)} = \Phi'(x+2m|-1) \quad (45)$$

$$\frac{A}{1-T}(x) = \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{3}}|1\right); \sqrt{3} \frac{T(x)+1}{T(x)-1} = \Phi'\left(\frac{x}{\sqrt{3}}|1\right) \quad (46)$$

$$\frac{T}{1-A}(x) = \Phi\left(\frac{x+2m}{\sqrt{3}}|1\right); -\sqrt{3} \frac{A(x)+1}{A(x)-1} = \Phi'\left(\frac{x+2m}{\sqrt{3}}|1\right) \quad (47)$$

Le formule precedenti possono essere utilizzate per ricavare la so la proprietà importante delle FTG di ordine 3 che non è stato pos sibile ottenere direttamente dallo studio delle funzioni sull'asse rea le, senza far ricorso alle funzioni ellittiche: e cioè il teorema di ad dizione. Calcolando la prima delle (44) nel punto $x+y$, applicando il teorema di addizione (42) della Φ u e riinserendo al posto di Φ e Φ' le espressioni in termini di A e T date dalla stessa (44), si arriva dopo alcuni passaggi alla seguente relazione:

$$\frac{T(x+y)}{A^2(x+y)} = \frac{[A(y)T(y) - A(x)T(x)][T^2(x)A(y) - T^2(y)A(x)]}{[T(x)A^2(y) - T(y)A^2(x)]^2} \quad (48)$$

Ripetendo lo stesso ragionamento a partire dalla (45) [in questo caso il teorema di addizione (42) si applica spezzando $x+y+2m$ in $(x+m)+(y+m)$, e per riesprimere Φ e Φ' in termini di A e T si usano le(38)], si giunge alla relazione:

$$\frac{A(x+y)}{T^2(x+y)} = \frac{[T(x)A^2(y) - T(y)A^2(x)][T^2(x)A(y) - T^2(y)A(x)]}{[A(y)T(y) - A(x)T(x)]^2} \quad (49)$$

da cui si deduce immediatamente

$$S(x+y) = \frac{T(x)A^2(y) - T(y)A^2(x)}{A(y)T(y) - A(x)T(x)} \quad (50)$$

e combinando questa formula separatamente con la (48) e la (49)

$$A(x+y) = \frac{T(x)A^2(y) - T(y)A^2(x)}{T^2(x)A(y) - T^2(y)A(x)} \quad (51)$$

$$T(x+y) = \frac{T(y)A(y) - T(x)A(x)}{T^2(x)A(y) - T^2(y)A(x)}$$

che si rivelano funzioni razionali di A e T di particolare semplicità ed eleganza.

Nel limite $y \rightarrow x$ (applicando p.es. il teorema di De l'Hospital) si trovano le seguenti formule di duplicazione:

$$\begin{aligned} A(2x) &= \frac{A(1+T^3)}{T(1+A^3)} \\ T(2x) &= \frac{T^3 - A^3}{T(1+A^3)} \\ S(2x) &= \frac{A(1+T^3)}{T^3 - A^3} \end{aligned} \quad (52)$$

Quanto alle formule di sottrazione, esse si calcolano dalle (50) e (51) con la sostituzione $y \rightarrow -y$, e usando le formule collegative (12) e (13). Dopo un riarrangiamento dei termini, si ottiene

$$\begin{aligned} A(x-y) &= - \frac{T(x)A^2(y) - T(y)A^2(x)}{A(x) + A(y)T(y)T^2(x)} \\ T(x-y) &= \frac{A(y) + A(x)T(x)T^2(y)}{A(x) + A(y)T(y)T^2(x)} \end{aligned} \quad (53)$$

$$S(x-y) = - \frac{T(x)A^2(y) - T(y)A^2(x)}{A(y) + A(x)T(x)T^2(y)}$$

Il diverso aspetto delle (53) in confronto con le (50) e (51) (che mostra un comportamento non analogo a quello delle funzioni trigonometriche ordinarie) è dovuto al fatto che, per n dispari, le FTG non hanno parità definita.

Per quanto riguarda il problema delle formule di bisezione, una breve discussione sarà svolta più avanti.

Per concludere questo paragrafo, ci si può chiedere quale può essere l'utilità di presentare le funzioni ellittiche di tipo equianarmonico sotto la forma di FTG di ordine 3. I vantaggi di tale presentazione ci sembrano consistere soprattutto nei due aspetti seguenti: il primo è dato dalla maggior maneggevolezza delle FTG nelle procedure di integrazione per sostituzione, ecc., dovuto all'analogia di comportamento con le funzioni trigonometriche ordinarie; l'altro è il fatto che, usando le FTG, quando la variabile x è reale si rimane sempre strettamente nel campo reale, mentre con la Φ_u , ogni volta che si vuole usare una delle numerose formule in cui intervengono gli invarianti e_1 ed e_3 , si deve necessariamente passare per il campo complesso. Tra queste è la formula di bisezione, che quindi non può essere usata proficuamente per ricavare una formula di bisezione per le FTG. L'Autore del presente studio è riuscito a trovare una formula di bisezione delle FTG di ordine 3 il cui calcolo, quando l'argomento è reale, eviti di passare attraverso il campo complesso: tuttavia, data la complicazione sia del procedimento che dell'espressione finale, tale risultato verrà presentato in una pubblicazione separata, in cui verrà anche data una formula di trisezione.

Come ultimo commento, l'uso diretto della Φ_u è senz'altro di maggiore utilità quando si vogliono studiare le sue proprietà nelle vicinanze

dei suoi poli, mentre l'uso delle FTG sembra essere più appropriato per studiare la funzione lontano dai poli, in particolare nelle vicinanze dei punti che dividono i periodi in tre parti uguali.

Quanto alla valutazione dei valori numerici delle FTG nel piano com plesso, è chiaro che essi possono essere dedotti a partire dalle esisten ti tabulazioni della $P(u|1)$: tuttavia è agevolmente ottenibile anche una valutazione indipendente, che sfrutti gli sviluppi in serie di A, T, S nelle vicinanze di $x = 0$ (molto ben convergenti), ed estenda i risultati ad altre regioni del piano complesso mediante le formule colle gative ed il teorema di addizione.

II.5 Le FTG di ordine 4.

Riportiamo qui le formule caratteristiche delle FTG di ordine 4.²⁸⁾

$$A^4 + T^4 = 1 \quad (54)$$

$$A' = T^3 : T' = -A^3 \quad (55)$$

$$S' = 1/T^2 ; (1/S)' = -1/A^2 \quad (56)$$

da cui si possono immediatamente ricavare le formule di derivazione delle funzioni inverse:

$$-\frac{d}{dx} \arct T(x) = \frac{d}{dx} \arcc A(x) = \frac{1}{(1-x^4)^{3/4}} \quad (57)$$

$$\frac{d}{dx} \arcs S(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^4}} \quad (58)$$

29) E' forse superfluo ricordare che anche in questo paragrafo verrà omezzo l'indice 4 che designa l'ordine delle funzioni: di conseguenza, i simboli A, T, S, m hanno un significato diverso da quello assunto nel precedente paragrafo.

E' proprio da quest'ultima formula che conviene prendere le mosse per trovare il collegamento tra le FTG di ordine 4 e le funzioni ellittiche. Si può anticipare a questo punto che entreranno in gioco le funzioni ellittiche $\wp u$ che potremo chiamare "di tipo lemniscatico", con $g_3 = 0$.

E' bene quindi premettere un breve riepilogo delle proprietà principali di tali funzioni. Una funzione di Weierstrass con $g_3 = 0$ (che da ora in poi sarà indicata con $\wp(u|g_2)$) può essere, secondo il segno di g_2 , o con $\Delta < 0$ quando g_2 è positivo (e in tal caso il periodo reale e quello immaginario, uguali in modulo, sono periodi primitivi) o con $\Delta > 0$ quando g_2 è negativo (e in tal caso il periodo reale e quello immaginario, uguali in modulo e non primitivi, sono $\sqrt{2}$ volte più grandi dei periodi primitivi, disposti lungo le rette parallele alle bisettrici dei quadranti del piano complesso). Valgono infatti le seguenti relazioni, ricavate direttamente dalla condizione di omogeneità (32):

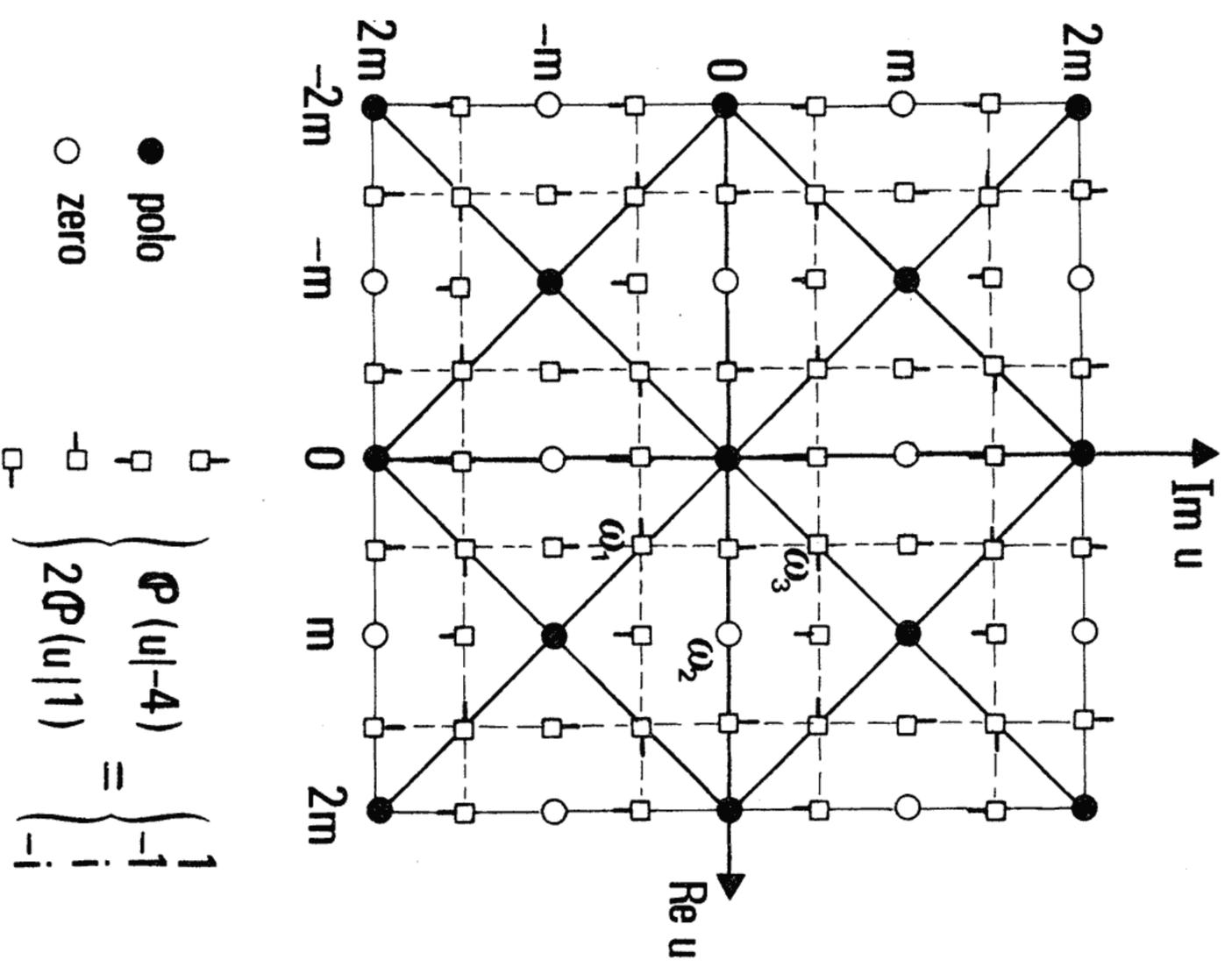
$$\wp(iu|g_2) = -\wp(u|g_2) \quad (59)$$

$$\wp(u|-g_2) = i \wp(e^{i\pi/4} u|g_2) \quad (60)$$

Si ottiene quindi lo schema mostrato in Fig. 6, ove le due funzioni riportate come esempio $[\wp(u|-4)]$ e $[\wp(u|1)]$ sono state scelte perché hanno lo stesso periodo reale, che verrà indicato con $2m$, e lo stesso periodo immaginario, uguale a $2mi$. I campi fondamentali delle funzioni (quello della $\wp(u|1)$ ha area doppia dell'altro) sono delimitati dalle linee più marcate.

Un'altra proprietà importante delle funzioni $\wp u$ di tipo lemniscatico è che, essendo $e_2 = 0$ qualunque sia g_2 , e trattandosi (come già detto) di uno zero doppio, tali funzioni hanno sia gli zeri che i poli

$\mathcal{P}(|u|-4,0)$



$\mathcal{P}(|u|1,0)$

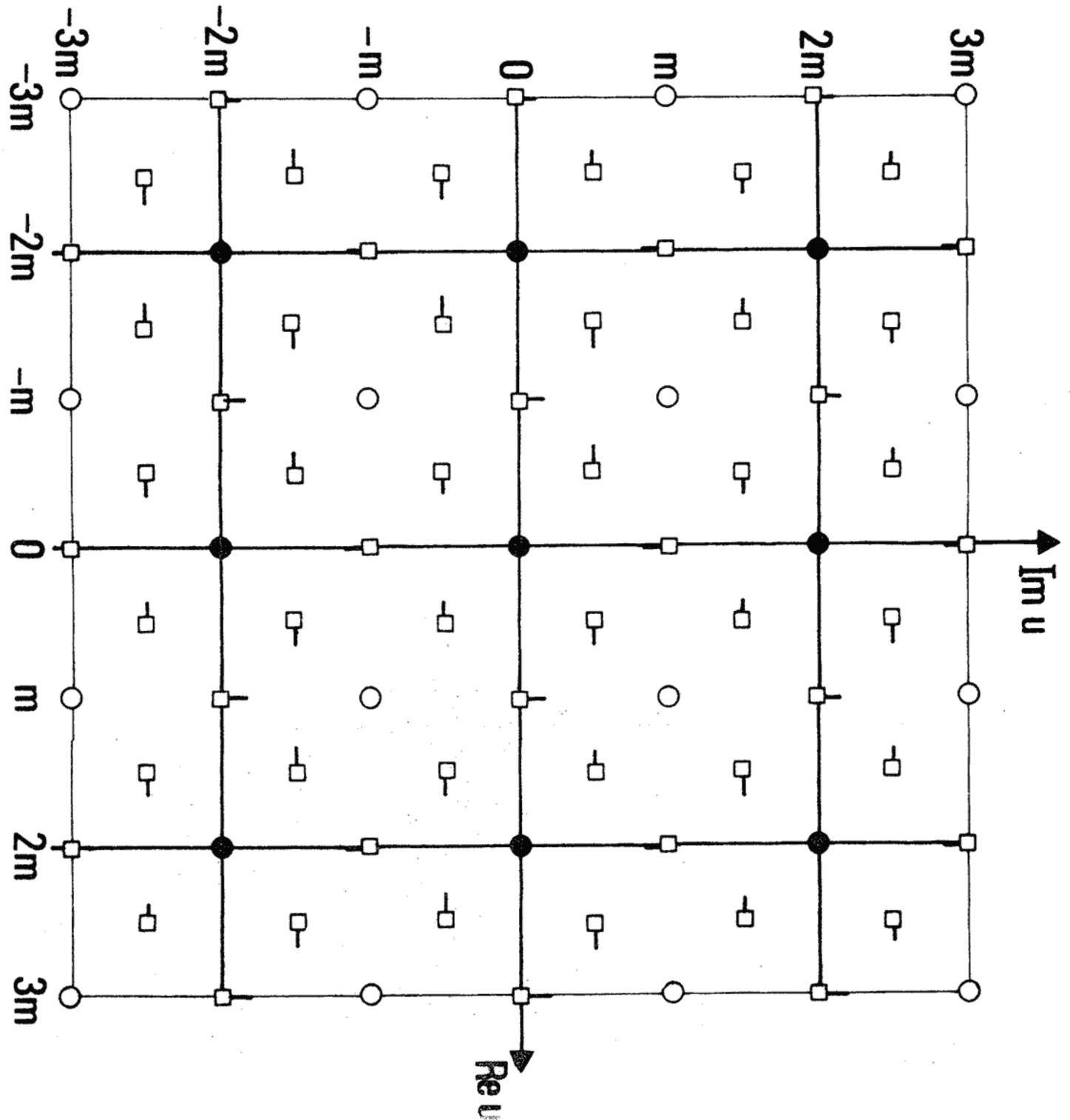
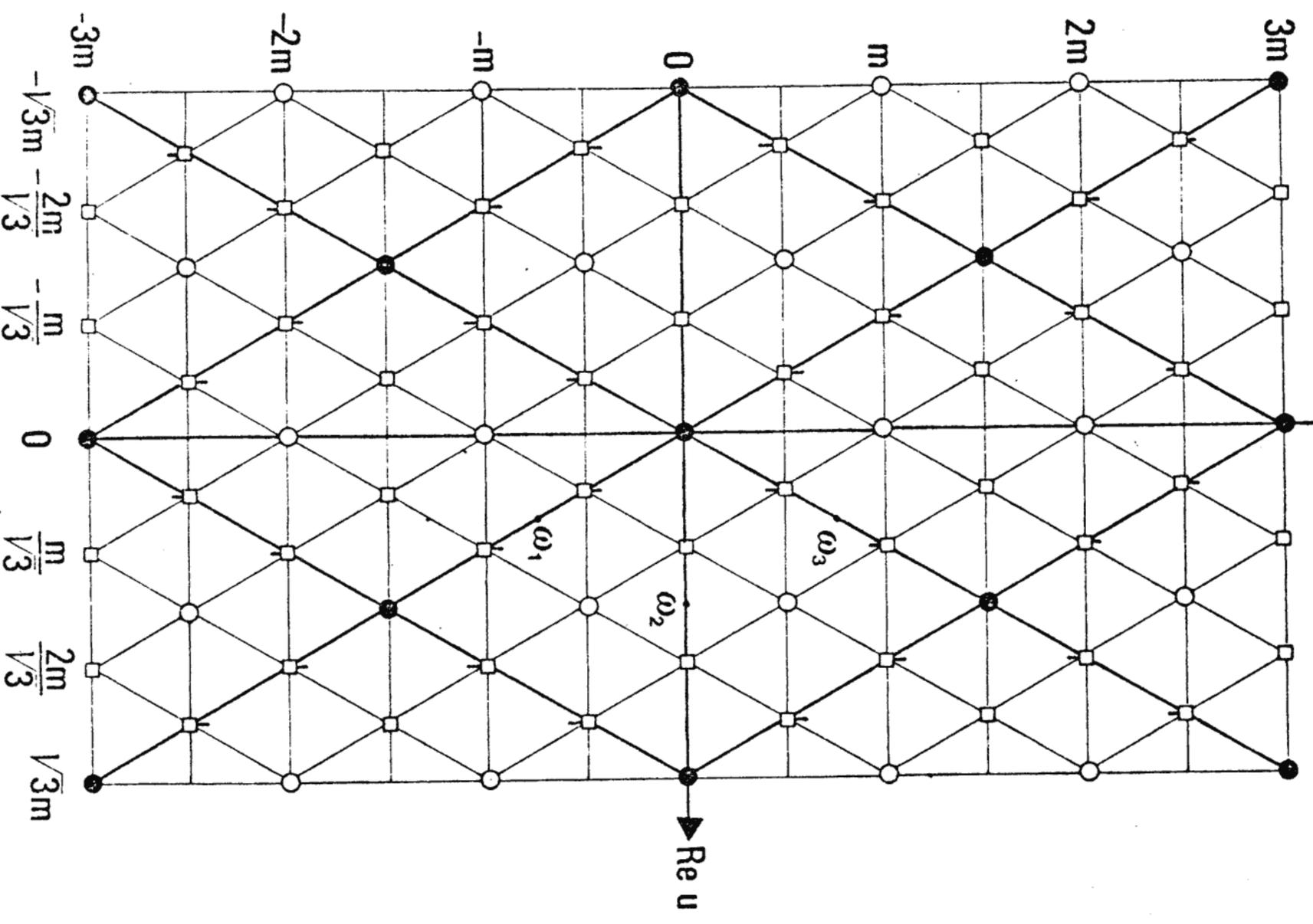
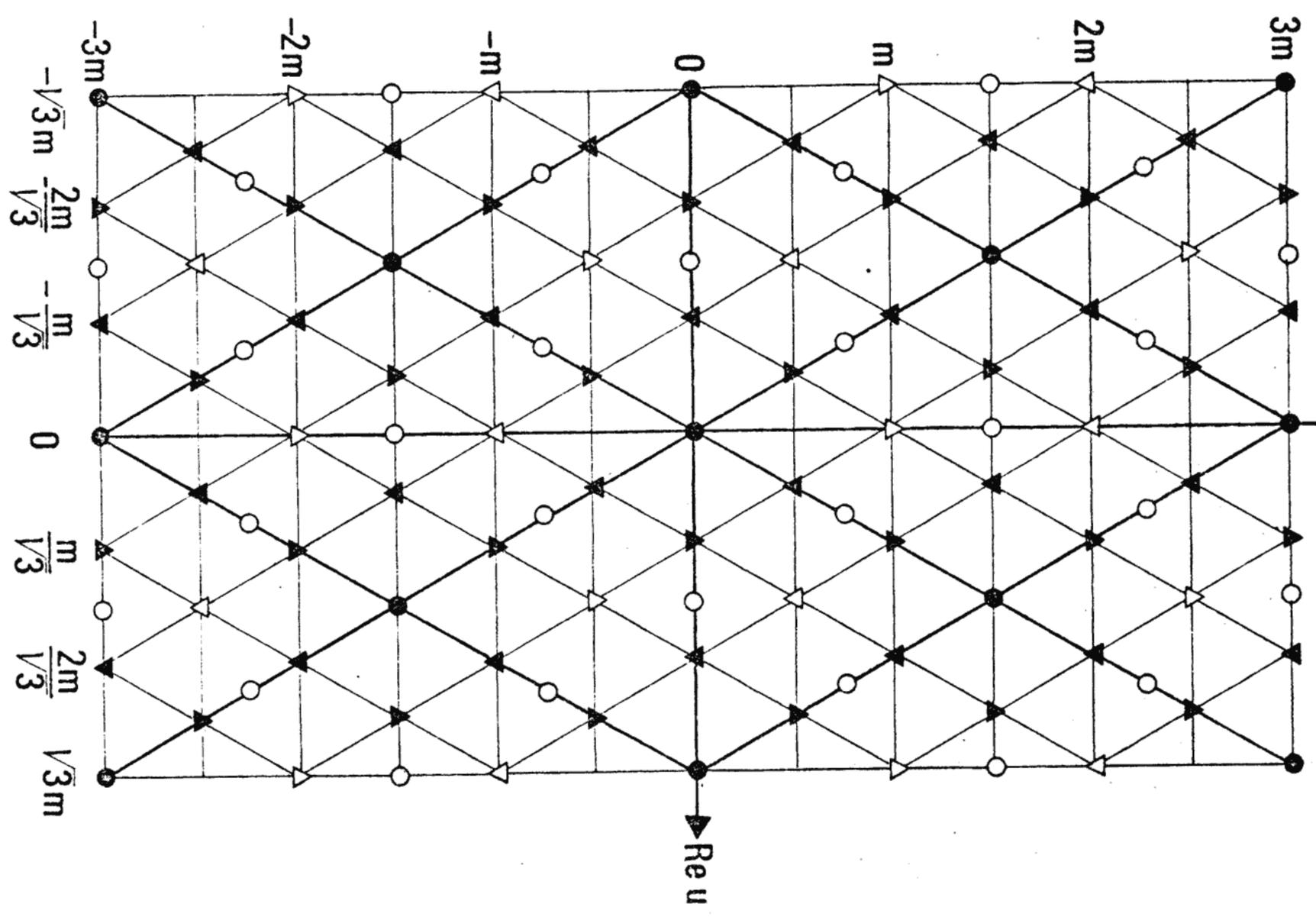


fig.6

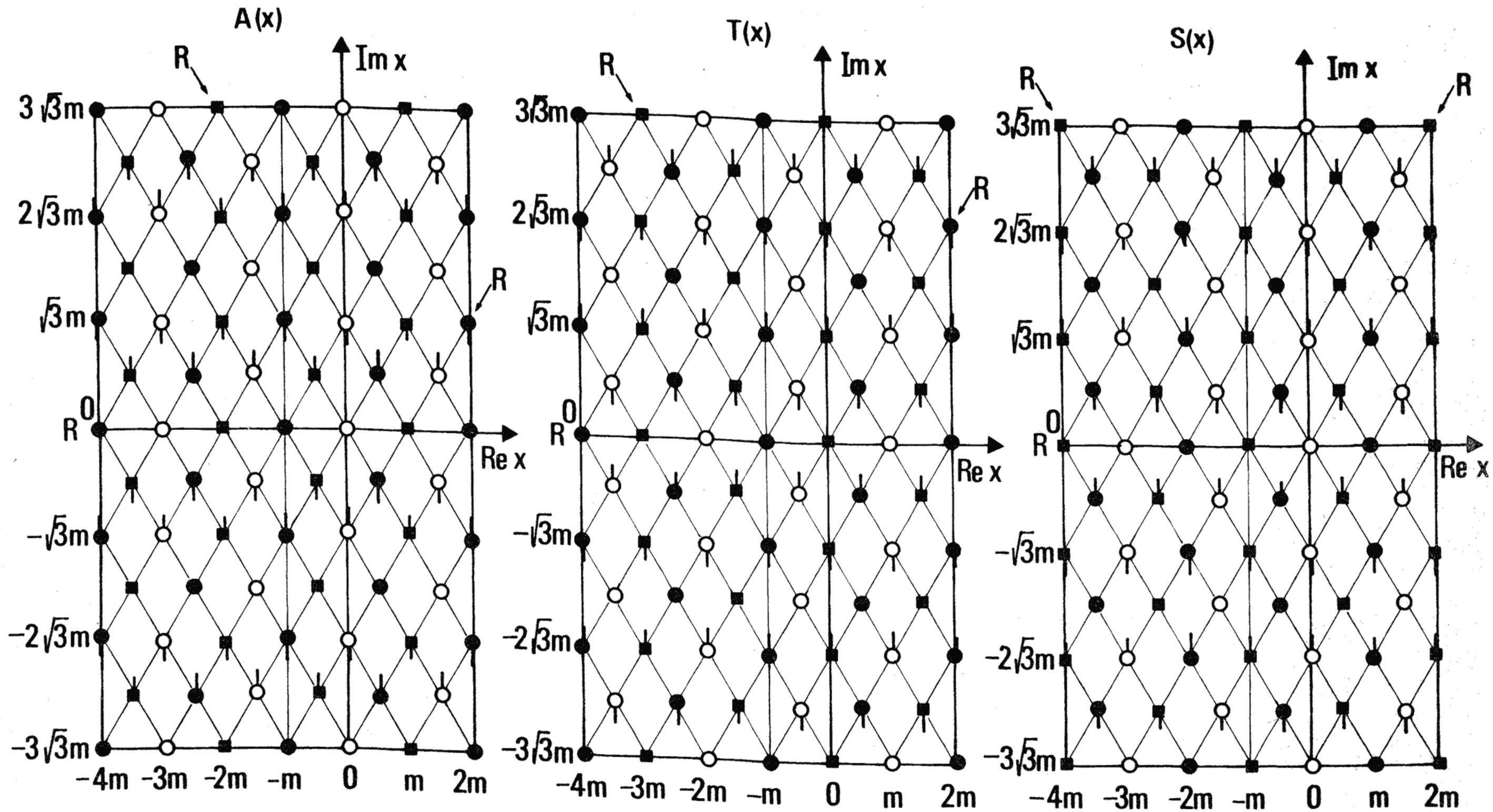
$\rho(u|0,1)$



$\rho'(u|0,1)$



VALORI DELLE FUNZIONI : \bullet polo \circ zero \square 1 \triangle $e^{2i\pi/3}$ \blacktriangle $e^{-2i\pi/3}$ \blacktriangledown $-\sqrt{3}$ \blacktriangledown $\sqrt{3}$ \triangleleft $-i$ \triangleright $+i$



zeri	CON RESIDUO	poli	radici cubiche di ± 1
\circ	± 1	\bullet	\blacksquare FUNZIONE ± 1
\circ	$\pm e^{2i\pi/3}$	\bullet	\blacksquare $\pm e^{2i\pi/3}$
\circ	$\pm e^{-2i\pi/3}$	\bullet	\blacksquare $\pm e^{-2i\pi/3}$

(+ per T - per A e S i poli;
- per T + per A e S gli zeri)

(+ per A e T - per S)

fig. 5

doppi e quindi risultano essere il quadrato di una funzione uniforme (con zeri e poli semplici).

Riprendendo la definizione

$$\text{arcS}(x) = \int_0^x \frac{dx'}{\sqrt{1+x'^4}}$$

con la sostituzione $x'^2 = t$ si ha

$$\text{arcS}(x) = \int_0^{x^2} \frac{dt}{\sqrt{4t^3+4t}} = \mathcal{P}^{-1}(x^2|-4) - \mathcal{P}^{-1}(0|-4) \quad (61)$$

La funzione $\mathcal{P}(u|-4)$ si annulla (v. Fig. 6) nel punto di mezzo del periodo reale ($u=m$). Ponendo $\text{arcS}(x) = y$ [cioè $x = s(y)$] si trova subito dall'inversione della (61):

$$x^2 = S^2(y) = \mathcal{P}(y+m|-4)$$

da cui (sostituendo di nuovo y con x)

$$S(x) = \sqrt{\mathcal{P}(x+m|-4)} = 1 / \sqrt{\mathcal{P}(x|-4)} \quad (62)$$

L'ultima uguaglianza è stata ottenuta applicando la formula di addizione della $\mathcal{P}u$ e ricordando che $\mathcal{P}(m|-4) = \mathcal{P}'(m|-4) = 0$.

La funzione $S(x)$ è quindi, per quanto ricordato prima, una funzione ellittica uniforme avente poli e zeri del primo ordine: sostituendo nella (62) gli opportuni valori di x , si trova che la costante m caratterizzante le FTG di ordine 4 si identifica con il semiperiodo reale della $\mathcal{P}(u|-4)$ [e, per quanto detto prima, anche con il semiperiodo reale della lemniscatica $\mathcal{P}(u|1)$ ³⁰⁾].

30) Di fatto è possibile esprimere le FTG di ordine 4 anche in funzione della $\mathcal{P}(x|1)$, utilizzando, a partire dalla (62), le formule (59), (60) e (42).

Preferiamo ritrovare questa relazione con altro metodo nel prossimo paragrafo.

Nell'applicare la (62) bisogna usare cautela nel servirsi della parità della Φu : infatti si può facilmente vedere che il radicale cambia di segno percorrendo una retta che attraversi un polo o uno zero della Φn , in modo che di fatto $S(x)$ risulta essere (come deve) una funzione dispari. Quanto all'espressione di A e T , si determina immediatamente derivando rispettivamente $1/S$ e S . Si ha infatti:

$$T^2 = 1/S' = - \frac{2[\Phi(x|-4)]^{3/2}}{\Phi'(x|-4)} \quad (63)$$

$$A^2 = -1(1/S)' = - \frac{2\sqrt{\Phi(x|-4)}}{\Phi'(x|-4)}$$

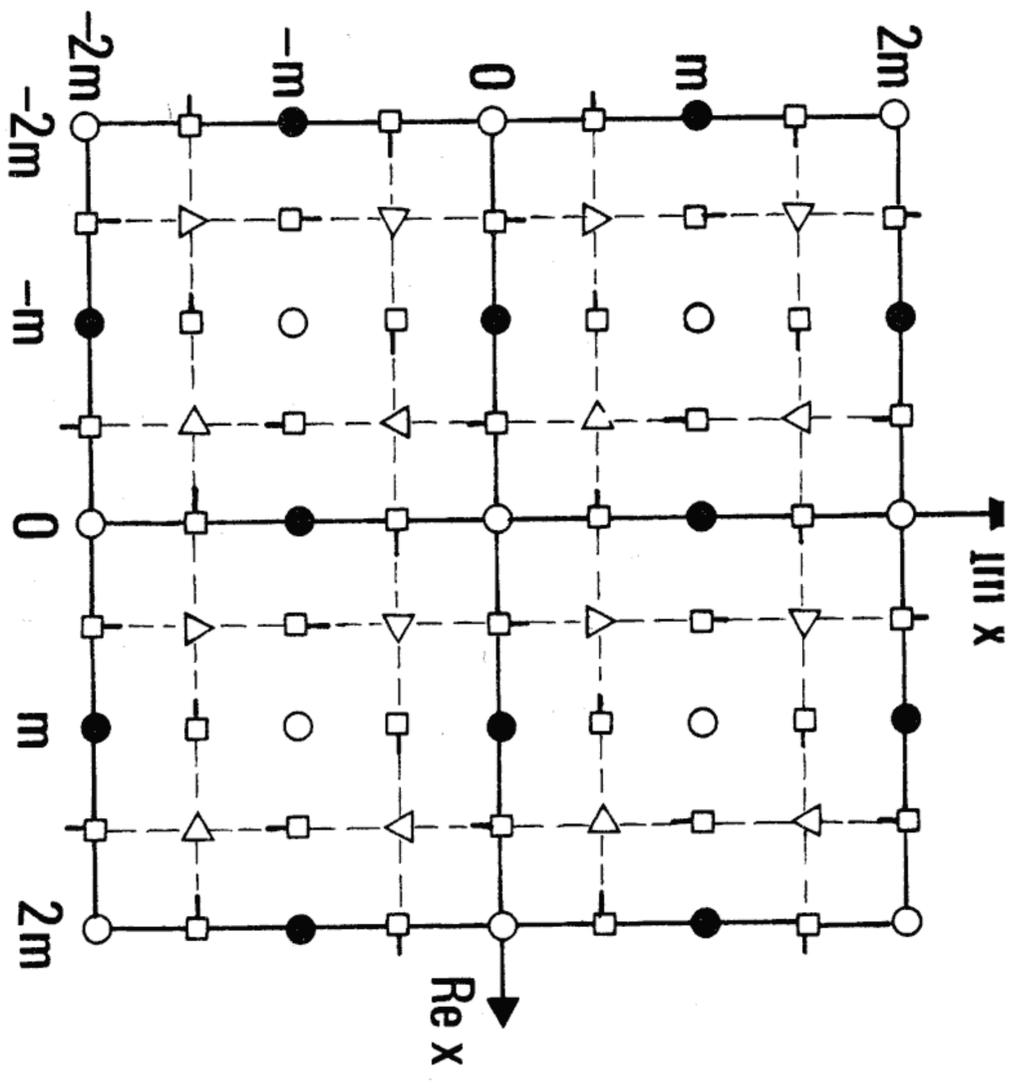
Per la converzione dei segni dei radicali, di cui si è parlato in precedenza, risulta che, per x reale, i secondi membri delle (63) risultano sempre reali e positivi. Poiché nei punti ove Φx ha uno zero doppio $\Phi'x$ ha uno zero semplice, e ove Φx ha un polo doppio $\Phi'x$ ha un polo triplo, tutti gli zeri delle (63) sono doppi; quindi, ricavando A e T mediante estrazione della radice quadrata, tali funzioni non hanno punti di diramazione in corrispondenza dei loro zeri. Invece i poli delle (63) sono semplici, e danno luogo quindi a punti di diramazione di tipo radice quadrata per A e T . Essi si hanno (per entrambe le funzioni, in accordo con un precedente risultato di validità generale) in corrispondenza dei punti ove è $\Phi'x = 0$ e $\Phi x \neq 0$, cioè $\omega_1 = \frac{m}{2}(1-i)$, $\omega_3 = \frac{m}{2}(1+i)$ tra tutti gli altri punti ottenuti aggiungendo ad essi un numero intero di periodi primitivi. Si ottiene quindi una rete di quadrati di lato m , con i vertici situati nei centri dei quadrati dell'analogia rete, avente i vertici nei poli e negli zeri doppi della $\Phi(u|-4)$; essa è caratterizzata dalle linee punteggiate nel diagramma di sinistra della Fig. 6.

Un'interessante proprietà valida lungo tutte le rette punteggiate è che su di esse la $\Phi(u|-4)$ ha modulo uguale a 1. Ciò si verifica immedia

tamente mediante la formula di addizione di un semiperiodo ω_1 o ω_3 all'argomento della $\wp u$, quale si trova, ad es., nel TRICOMI, e notando che $\wp(u+\omega_1|-4), \wp(u+\omega_3|-4)$ in base a tale formula hanno modulo 1 tutte le volte che $\wp u$ è reale. Inoltre, percorrendo il perimetro di uno dei quadrati di tale rete, la funzione $\wp(u|-4)$ percorre due volte il cerchio unitario: il che significa che essa non può avere modulo 1 in altri punti del campo fondamentale contenente il quadrato esaminato, e che di conseguenza in tutti i quadrati centrati negli zeri si deve avere $|\wp u| < 1$, in quelli centrati nei poli si deve avere $|\wp u| > 1$. (Si noti che due quadrati adiacenti costituiscono un campo fondamentale).

Lo stesso discorso vale per la funzione S , il cui andamento nel piano complesso è rappresentato in Fig. 7; tuttavia in questo caso lungo il perimetro di uno dei quadrati della rete a linee punteggiate la funzione percorre una sola volta il cerchio unitario (e infatti un campo fondamentale è formato da quattro quadrati).

Un'altra conseguenza di quanto ora ottenuto è che, essendo il rapporto tra A^2 e T^2 uguale a S^2 , lungo la rete dei quadrati in questione (che ora ai vertici esibiscono i poli delle due funzioni) A^2 e T^2 hanno lo stesso modulo, che potrà essere indicato con ρ^2 . Uno studio dettagliato delle formule (63) con un'opportuna convenzione per i segni dei radicali, quale quella descritta nel TRICOMI, mostra che le parti reali e immaginarie delle due funzioni hanno la stessa grandezza, così che, in ogni punto della rete, le funzioni A^2 e T^2 possono essere scritte sotto la forma $\pm \rho e^{\pm i\phi/2}$ (con i segni davanti a ϕ sempre diversi per le due funzioni) in cui ϕ è un'opportuna variabile che, su ogni segmento compreso fra due poli adiacenti, copre l'intervallo tra $-\frac{\pi}{2}$ e $+\frac{\pi}{2}$. È opportuno adottare la convenzione che ϕ varia da $-\frac{\pi}{2}$ a $+\frac{\pi}{2}$ percorrendo i segmenti in questione nel verso dell'asse reale o di quello immaginario.



VALORI DELLA FUNZIONE:

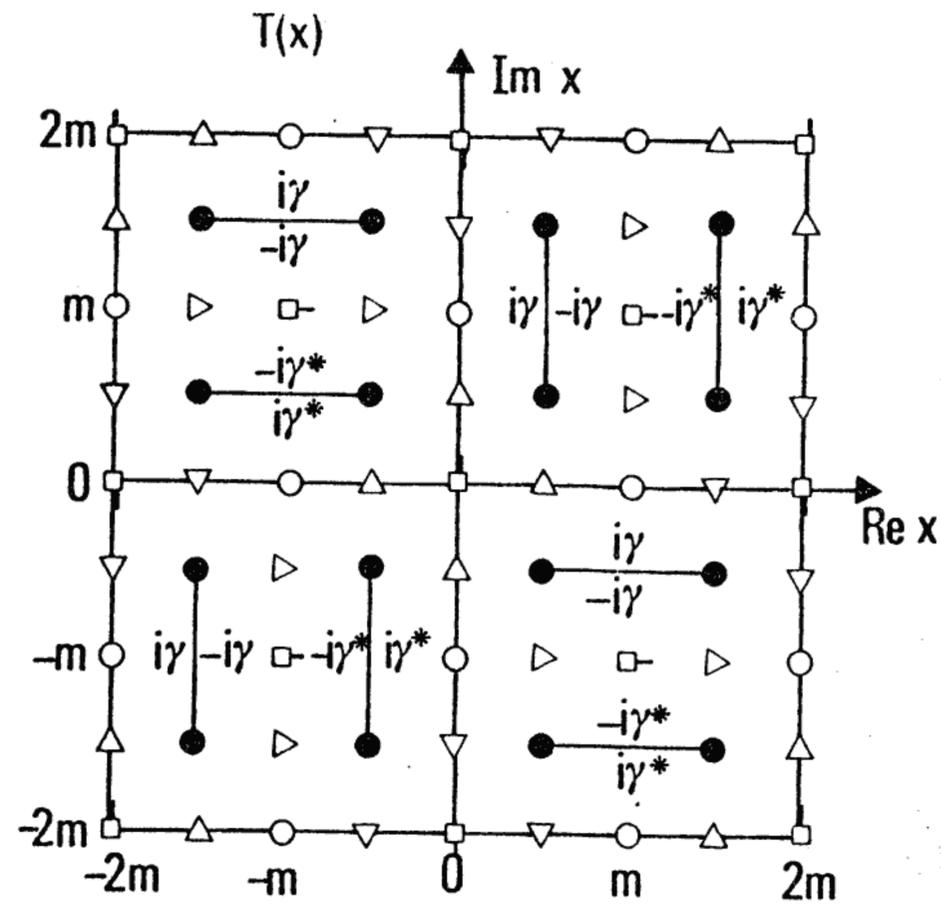
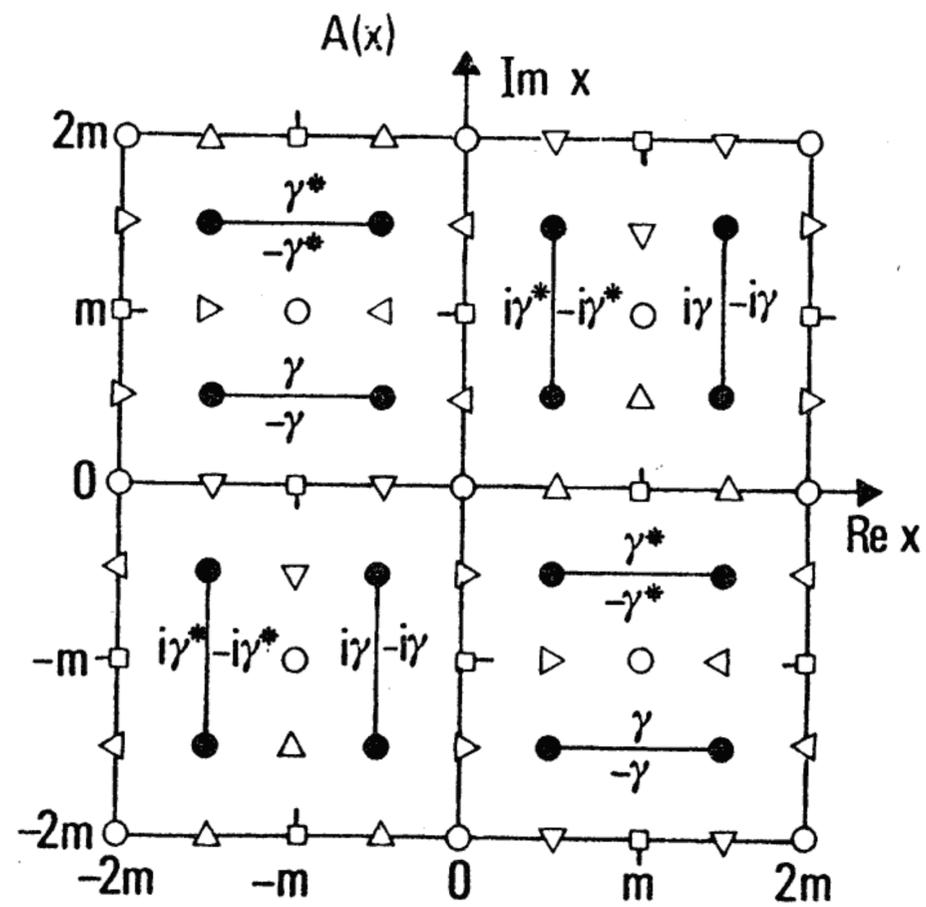
- polo □ 1 △ $e^{i\pi/4}$
- zero □ -1 △ $e^{3i\pi/4}$
- i △ $e^{-3i\pi/4}$
- -i △ $e^{-i\pi/4}$

fig.7

La specificazione di A^2 e T^2 sulla rete non è stata riportata qui in dettaglio per ragioni di brevità; in ogni caso essa è sempre ricostruibile a partire dai diagrammi di Fig. 8 (più avanti). Si noti che la relazione (54) implica l'uguaglianza $\rho = (2 \cos\phi)^{-1/4}$ (in cui, essendo $\cos\phi$ sempre non negativo, si deve prendere la radice aritmetica).

Sulla base di queste considerazioni è abbastanza facile arrivare al comportamento di A e T nel piano complesso. Come già detto, queste funzioni hanno dei punti di diramazione in tutti i vertici dei quadrati della rete considerata. Il modo più semplice di scegliere una struttura dei tagli nel piano si ha congiungendo tali punti di diramazione a due a due, attraverso segmenti rettilinei facenti parte della rete. Affinché sia verificata dappertutto la condizione (29) (con $e =$ radice quarta dell'unità), inclusi i valori dai due lati dei tagli, la struttura di tali segmenti va scelta secondo uno dei due schemi mostrati in Fig. 8. In entrambi i casi sono indicati i valori delle funzioni sui due lati di ogni taglio, con la notazione $\gamma = \rho e^{i\phi/4}$ e usando l'asterisco per indicare la coniugazione complessa.³¹⁾ La regione di piano complesso studiata nei diagrammi di Fig. 8 corrisponde a un campo fondamentale delle funzioni, che può essere periodato sia nella direzione dell'asse reale che in quella dell'asse immaginario. Si trova, come previsto, la periodicità reale $4m$ (anziché $2m$ come per le (63), a causa dell'ulteriore estrazione di radice quadrata), e la periodicità immaginaria $4mi$ ($2mi$ per le (63)). È immediato vedere che qualunque monomio di ordine pari in A e T (eventualmente contenente anche potenze negative di tali funzioni), potendo essere sempre espresso in termini di S, A^2 e T^2 , è

31) Poiché è $S^2 = \pm e^{\pm i\phi}$, il valore di ϕ in un punto specifico del taglio può essere ricavato a partire da S (naturalmente tenendo sempre presente la convenzione suaccennata per la scelta dei valori estremi $\pm \frac{\pi}{2}$). A questo proposito, ad un esame superficiale i diagrammi di Fig. 8 sembrano esibire una violazione sia della simmetria per rotazione che della parità delle funzioni lungo i tagli. In realtà tale violazione non c'è, perché bisogna appunto tenere presente la convenzione che i tagli vanno sempre percorsi nel verso dell'asse reale o di quello immaginario: l'inversione del senso di percorrenza muta γ in γ^* e viceversa.



- VALORI DELLE FUNZIONI:
- punto di diramazione
 - zero
 - 1 △ $2^{-1/4}$
 - -1 ▽ $-2^{-1/4}$
 - i ◁ $2^{-1/4}i$
 - -i ▷ $-2^{-1/4}i$

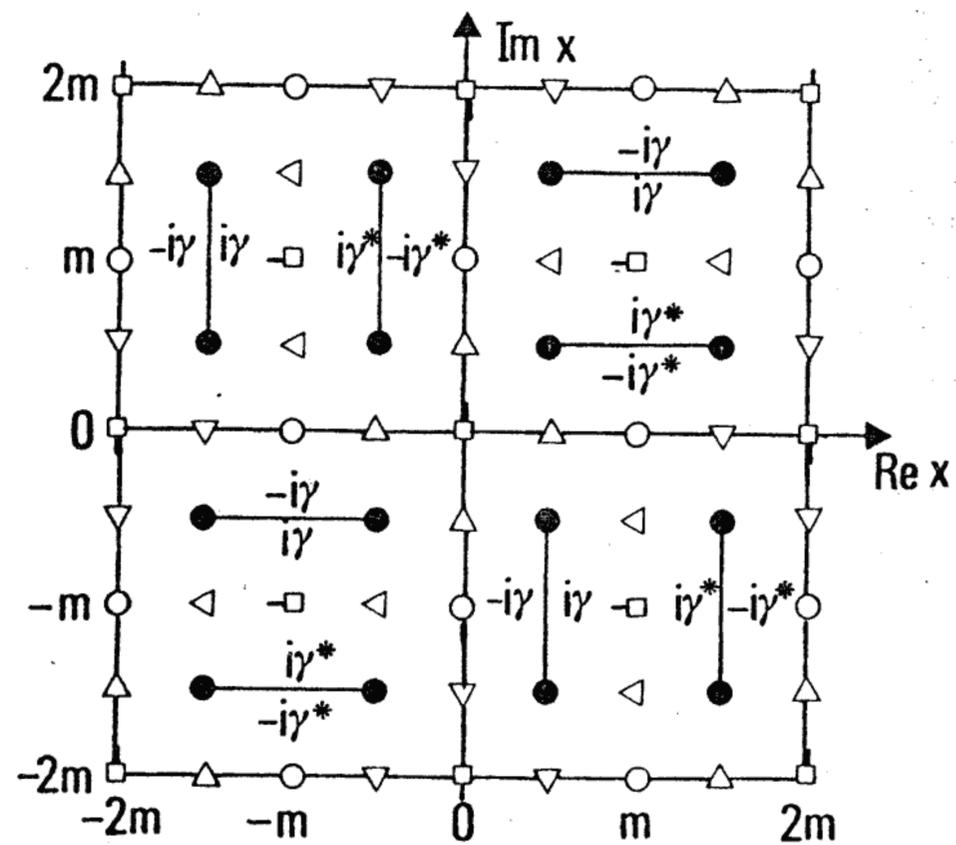
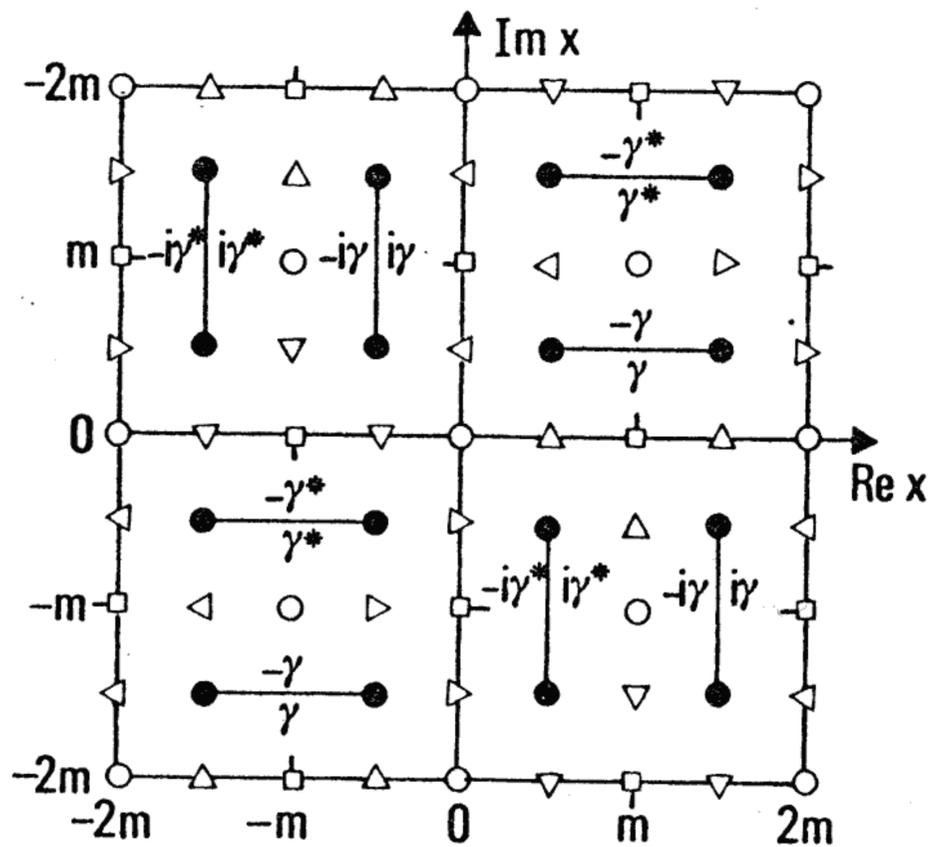


fig.8

una funzione che presenta poli, ma non punti di diramazione.

Dalle relazioni trovate in precedenza potrebbero essere dedotte altre proprietà delle FTG di ordine 4; tuttavia vogliamo prima esprimere tali funzioni non più tramite una $\mathcal{P}u$ di Weiestrass, ma attraverso le funzioni di Jacobi associate alla $\mathcal{P}u$ lemniscatica, che hanno il parametro $k^2 = \frac{1}{2}$, come verrà mostrato nel prossimo paragrafo, in cui verranno esposte anche ulteriori proprietà delle FTG di ordine 4.

II.6 Le FTG di ordine 4 espresse attraverso le funzioni di Jacobi.

Richiamiamo brevemente, per comodità di riferimento nei passaggi che seguiranno, la definizione e la proprietà principali delle funzioni di Jacobi, che, seguendo TRICOMI, verranno indicate con $sn v, cn v, dn v$. Si comincia con l'invertire l'integrale di Legendre di prima specie, $v(\phi)$:³²⁾:

$$v(\phi) = \int_0^\phi \frac{d\phi'}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \phi'}}$$

ottenendo una funzione $\phi = am v$, e si pone

$$sn v = \sin \phi = \sin[am v]$$

$$cn v = \cos \phi = \cos[am v]$$

$$dn v = \sqrt{1-k^2 \sin^2 \phi} = d(am v)/d v$$

che soddisfano le due identità

$$sn^2 v + cn^2 v = 1 \tag{64}$$

$$dn^2 v + k^2 sn^2 v = 1$$

e le seguenti relazioni differenziali:

$$sn'v = cn v dn v$$

$$cn'v = -sn v dnv$$

$$dn'v = -k^2 sn v cn v$$

(65)

32) In tutte le formule che seguono, k^2 è un parametro che va fissato a priori e da cui evidentemente dipendono tutte le funzioni. Si userà in seguito anche la notazione $k'^2 = 1-k^2$.

Le funzioni $\text{cn } v$ e $\text{dn } v$ sono pari nel loro argomento, $\text{sn } v$ invece è dispari. Sul TRICOMI è mostrato che tutte e tre funzioni di Jacobi sono funzioni ellittiche uniformi, con poli e zeri semplici, i cui periodi primitivi, possono essere calcolati in termini delle due costanti K e K' , definite (quando $0 < k^2 < 1$) da

$$K = \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi'}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \phi'}} \quad K' = \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi'}{\sqrt{1-k'^2 \sin^2 \phi'}} \quad (66)$$

Per il momento è il caso di lasciare da parte i dettagli del comportamento delle funzioni di Jacobi nel piano complesso, e di vedere qual'è il loro legame con le funzioni di Weierstrass. La prima relazione da prendere in esame è quella che esprime k^2 in termini delle costanti e_1, e_2, e_3 che (in modo equivalente a g_2, g_3) specificano la funzione di Weierstrass da considerare. Precisamente si ha:

$$k^2 = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3} ; \quad k'^2 = \frac{e_1 - e_2}{e_1 - e_3} \quad (67)$$

(ove la seconda formula è chiaramente una conseguenza della prima). Passando da una Φ_u ad un'altra "equivalente" ottenuta applicando la relazione di omogeneità (32), è immediato controllare che e_1, e_2, e_3 risultano tutti moltiplicati per t^{-2} e quindi k^2 e k'^2 restano invariati.

L'espressione delle funzioni di Jacobi in termini delle funzioni di Weierstrass caratterizzate dai parametri che figurano nelle (67) è la seguente (con $v = \sqrt{e_1 - e_3} u$)³³⁾:

33) I segni delle radici quadrate che figurano nelle (68) sono da ritenere fissati attraverso una convenzione opportuna, come quella descritta nel TRICOMI, a cui si è già accennato. Quando e_1, e_2, e_3 sono reali, il significato delle (68) è senza ambiguità.

$$\begin{aligned} \operatorname{sn} v &= \sqrt{e_1 - e_3} / \sqrt{\wp u - e_3} \\ \operatorname{cn} v &= \sqrt{\wp u - e_1} / \sqrt{\wp u - e_3} \\ \operatorname{dn} v &= \sqrt{\wp u - e_2} / \sqrt{\wp u - e_3} \end{aligned} \tag{68}$$

Dall'esame delle (67) e (68) è facile dedurre che la connessione diretta tra funzioni di Weierstrass invarianti reali e funzioni di Jacobi è di interesse pratico solo per la classe delle $\wp u$ per cui $\Delta < 0$, e i tre valori e_1, e_2, e_3 sono reali (con $e_1 > e_3$). Solo in questo caso infatti le (67) e (68) permettono di rimanere sempre nel campo reale per valori reali dell'argomento. Ora la funzione $\wp(u|-4)$, per mezzo della quale sono state espresse le FTG di ordine 4 nel paragrafo precedente, ha $\Delta > 0$, e_1 ed e_3 immaginari, e quindi non si presta ad un uso immediato delle (68)³⁴⁾. Tuttavia è da tener presente (cf. eq. (60) e nota³⁰⁾) che le FTG di ordine 4 possono essere espresse anche in termini della lemniscatica $\wp(u|1)$, che stavolta ha $\Delta < 0$, e per cui è $e_2=0, e_1=-e_3=\frac{1}{2}$.

Per le (67), le funzioni di Jacobi associate a tale $\wp u$ hanno $k^2 = k'^2 = \frac{1}{2}$. E' quindi da attendersi che le FTG di ordine 4 siano connesse in modo semplice a tali funzioni di Jacobi.

Invece di manipolare le (68), conviene ripartire di nuovo dall'integrale che definisce $\operatorname{arcS}(x)$:

$$\operatorname{arcS}(x) = \int_0^x \frac{dx'}{\sqrt{1+x'^4}}$$

34) Lo stesso discorso vale per le $\wp u$ di tipo equianarmonico discusso nel §II.4, legate alle FTG di ordine 3, che pertanto non possono essere espresse in modo conveniente in termini di funzioni di Jacobi.

Con la posizione $x = \operatorname{tg}\phi/2$, $x' = \operatorname{tg}\phi'/2$, l'integrale si trasforma nella seguente maniera:

$$\int_0^x \frac{dx'}{\sqrt{1+x'^2}} = \frac{1}{2} \int_0^\phi \frac{d\phi'}{\sqrt{\cos^4 \frac{\phi'}{2} + \sin^4 \frac{\phi'}{2}}} = \frac{1}{2} \int_0^\phi \frac{d\phi'}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \phi'}} = \frac{1}{2} v(\phi) \quad k^2 = \frac{1}{2}$$

Sottintendendo da ora in poi la specificazione del valore di k^2 , e ponendo $y = \operatorname{arcs}S(x)$ (cioè $S(y) = x$), si ha:

$$\phi = \operatorname{am}(2y); \quad \sin\phi = \operatorname{sn}(2y) = \frac{2x}{1+x^2} = \frac{2S(y)}{1+S^2(y)} \quad (69)$$

ricordando la formula che esprime il seno in funzione della tangente dell'angolo metà, e sostituendo per x il suo valore $S(y)$.

Mettendo di nuovo x al posto di y , risolvendo la (69) come una equazione di secondo grado che dà $S(x)$ in funzione di $\operatorname{sn}(2x)$, e scegliendo la radice dell'equazione in modo da avere $S(0) = 0$,³⁵⁾ si ottiene:

$$S(x) = \frac{1 - \operatorname{cn}(2x)}{\operatorname{sn}(2x)} \quad (70)$$

Mediante le formule di duplicazione delle funzioni di Jacobi:

$$\begin{aligned} \operatorname{sn}(2v) &= \frac{2 \operatorname{sn} v \operatorname{cn} v \operatorname{dn} v}{1 - k^2 \operatorname{sn}^4 v} \\ \operatorname{cn}(2v) &= \frac{\operatorname{cn}^2 v - \operatorname{sn}^2 v \operatorname{dn}^2 v}{1 - k^2 \operatorname{sn}^4 v} \\ \operatorname{dn}(2v) &= \frac{\operatorname{dn}^2 v - k^2 \operatorname{sn}^2 v \operatorname{cn}^2 v}{1 - k^2 \operatorname{sn}^4 v} \end{aligned} \quad (71)$$

si ha infine la formula

$$S(x) = \frac{\operatorname{sn} x \operatorname{dn} x}{\operatorname{cn} x} \quad (72)$$

35) E' immediato vedere che l'altra soluzione fornisce $1/S(x)$.

E' interessante notare che, nella derivazione della (72) a partire dalla (70), non è stato necessario specificare numericamente il valore di k^2 .

La semplice formula (72) può essere ora combinata con le (68) per ottenere l'espressione delle FTG in funzione della $\wp(u|1)$. Si ottiene immediatamente:

$$S(x) = \left[\frac{\wp(x|1) - e_1}{\wp(x|1) - e_2} (\wp(x|1) - e_3) \right]^{-1/2} = \sqrt{\frac{\wp(x|1)}{\wp^2(x|1) - \frac{1}{4}}} \quad (73)$$

La seconda uguaglianza nella (73) è ottenuta specificando i valori delle e_i per la $\wp(x|1)$; confrontando con la (62) si arriva ad una relazione algebrica razionale tra la $\wp(x|-4)$ e la $\wp(x|1)$, ottenibile anche per altra via (v. nota ³⁰).

A partire dalla formula (72), e sulla base della collocazione degli zeri e dei poli delle funzioni di Jacobi (quale può essere trovata p.es. nel TRICOMI, fig. 24), si riottiene facilmente lo schema di Fig. 7: si può vedere che gli zeri di $S(x)$ sono dati dagli zeri di $\operatorname{sn} x$ e da quelli di $\operatorname{dn} x$, mentre i poli sono quelli comuni alle tre funzioni, più gli zeri di $\operatorname{cn} x$. E' immediata l'identificazione $K = K' = m$. Che il periodo reale di $S(x)$ sia $2m$ e non $4m$ (come il periodo di $\operatorname{sn} x$ e $\operatorname{cn} x$) può essere visto immediatamente dalla (70).

Analogamente a quanto fatto nel paragrafo precedente, le espressioni di A^2 e T^2 possono essere ottenute per derivazione. Si ha

$$T^2(x) = 1/S' = \frac{2\operatorname{cn}^2 x}{1+\operatorname{cn}^4 x} \quad (74)$$

$$A^2(x) = -1/(1/S)' = \frac{1-\operatorname{cn}^4 x}{1+\operatorname{cn}^4 x} = \frac{2\operatorname{sn}^2 x \operatorname{dn}^2 x}{1+\operatorname{cn}^4 x}$$

Si noti che per ricavare le (74) è stato necessario specificare per

k^2 il valore $\frac{1}{2}$.

Si ritrova il risultato che A^2 e T^2 sono funzioni uniformi, le quali presentano zeri doppi e poli semplici. E' immediato controllare che le relazioni (54) e (55) (queste ultime da moltiplicare rispettivamente per $2A$ e $2T$) sono verificate dalle (74). Si noti che i poli di cnx non contribuiscono ai poli delle funzioni, ma solo agli zeri di T^2 ; i poli di A^2 e T^2 si hanno nei punti ove $cn^4x = -1$, e sono ovviamente semplici. Quanto alle conseguenze dell'estrazione della radice quadrata nelle (74) per ottenere A e T , e all'aspetto di queste ultime funzioni nel piano complesso, si ritrovano, sia pure con minore facilità, tutte le conclusioni raggiunte nel paragrafo precedente. Le funzioni di Jacobi risultano particolarmente adatte per ottenere le formule di duplicazione delle FTG. Quadrando la (70) si trova infatti immediatamente

$$S^2(x) = \frac{1-cn(2x)}{1+cn(2x)}$$

da cui si ottiene immediatamente

$$cn(2x) = \frac{1-S^2(x)}{1+S^2(x)} \quad (75)$$

La (69) e una semplice elaborazione della relazione $dn^2 = 1-k^2sn^2$ fornisce

$$sn(2x) = \frac{2S(x)}{1+S^2(x)} \quad dn(2x) = \frac{1}{A^2(x)+T^2(x)} \quad (76)$$

Con l'aiuto delle (75) e (76) si ottiene immediatamente:

$$S(2x) = \frac{2A(x)T(x)}{T^4(x) - A^4(x)}$$

$$A^2(2x) = \frac{4A^2(x)T^2(x)}{1 + 4A^4(x)T^4(x)} \quad (77)$$

$$T^2(2x) = \frac{(T^4(x) - A^4(x))^2}{1 + 4A^4(x)T^4(x)}$$

Come in precedenza, per avere le formule di duplicazione per A e T si estrae la radice quadrata delle due ultime tra le (77), scegliendo la determinazione in accordo con la struttura di tagli scelta nel piano complesso (Fig. 8).

Per le formule generali di addizione, le funzioni di Jacobi non sono molto convenienti; è preferibile invece seguire un metodo analogo a quello usato per le funzioni di ordine 3, applicando il teorema di addizione alla funzione $\wp(x|-4)$, uguale a $1/S^2(x)$ per la (62). In questo modo si trova agevolmente la formula di addizione per $S(x+y)$, e, derivando tale espressione (o il suo inverso) rispetto a x si trovano le formule di addizione per A^2 e T^2 . Il risultato del calcolo è il seguente (in cui sono compendiate anche le formule di sottrazione, immediatamente ottenibili in base alla considerazione che A è una funzione dispari e T una funzione pari):

$$S(\underline{x+y}) = \frac{A^2(x)T^2(y) - A^2(y)T^2(x)}{A(x)T(x) \mp A(y)T(y)} \quad (78)$$

$$A^2(\underline{x+y}) = \frac{[A^2(x)T^2(y) - A^2(y)T^2(x)]^2}{F_{\pm}}; T^2(\underline{x+y}) = \frac{[A(x)T(x) \mp A(y)T(y)]^2}{F_{\pm}}$$

con

$$F_{\pm} = A^2(x)T^2(y) + A^2(y)T^2(x) \mp 2A(x)T(x)A(y)T(y) [A^2(x)A^2(y) + T^2(x)T^2(y)].$$

Si noti che in tutte le espressioni che entrano nelle (78) sono contenuti soltanto dei monomi di ordine pari nelle FTG riferite alla stessa variabile, i quali, per quanto detto prima, sono funzioni uniformi.

Applicando il teorema di De l'Hospital nelle (78) nel limite $y \rightarrow x$, si ritrovano le (77); il calcolo è tuttavia piuttosto laborioso, perché per A^2 e T^2 il teorema va applicato due volte.

Per concludere l'argomento delle FTG di ordine 4, vediamo che l'ultima delle (77) è particolarmente adatta per il calcolo delle formule di bisezione (che, analogamente a quanto accade per le funzioni trigonometriche ordinarie, si esprimono solo attraverso la funzione T). Infatti, con semplici passaggi, da tale formula si ottiene la relazione:

$$4A^4\left(\frac{x}{2}\right)T^4\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 - T^2(x)}{1 + T^2(x)}$$

che si può risolvere rispetto a $A^4\left(\frac{x}{2}\right)$ oppure $T^4\left(\frac{x}{2}\right)$: in entrambi i casi viene la stessa equazione algebrica di secondo grado, le cui due soluzioni danno le quantità cercate, e precisamente

$$\frac{A^4\left(\frac{x}{2}\right)}{T^4\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{1}{2} \pm \frac{T(x)}{\sqrt{2(1+T^2(x))}} \quad (79)$$

Poiché nei punti in cui $T^2(x) = -1$ l'espressione $2(1+T^2)$ si comporta come A^4 e quindi ha uno zero del quart'ordine, non c'è problema di punti di diramazione nella (79) neppure quando se ne estraie la radice quadrata, mentre invece compaiono i punti di diramazione caratteristici di A e T quando si estraie la radice quarta.

Come ultimo argomento, diamo lo sviluppo in serie delle funzioni A, T e S intorno al punto $x = 0$: come è già noto, per le prime due funzioni esso procede per potenze di x^4 , ed è facile convincersi che ciò accade

anche per la funzione S, anche se, diversamente che per l'ordine 3, non c'è alcun legame diretto con i coefficienti dello sviluppo delle altre funzioni:

$$\begin{aligned} A(x) &= x - \frac{3x^5}{20} + \frac{19x^9}{480} - \frac{469x^{13}}{41600} + \frac{189611}{56576000} x^{17} \dots\dots \\ T(x) &= 1 - \frac{x^4}{4} + \frac{9x^8}{160} - \frac{149x^{12}}{9600} + \frac{15147}{3328000} x^{16} \dots\dots \quad (79') \\ S(x) &= x + \frac{x^5}{10} + \frac{x^9}{120} + \frac{11x^{13}}{15600} + \frac{211x^{17}}{3536000} + \dots\dots \end{aligned}$$

In base al contenuto di questo paragrafo il lettore probabilmente non avrà visto come particolarmente evidente la convenienza di esprimere le FTG di ordine 4 in termini di funzioni di Jacobi invece che delle \wp di Weierstrass. L'utilità di tale trattazione risulterà invece chiara più avanti, quando si constaterà che la formulazione delle FTG attraverso le funzioni di Jacobi permette in modo immediato l'estensione della classe delle FTG, in modo tale da poter rappresentare, attraverso funzioni di questo tipo, l'intera classe delle funzioni ellittiche a invarianti reali e discriminante negativo. Tale sviluppo verrà portato avanti nella Parte III (§III.2).

II.7 Le FTG di ordine 6.

Come verrà mostrato nel prosieguo di questo paragrafo, le FTG di ordine 6 sono connesse alle funzioni ellittiche di tipo equianarmonico come quelle di ordine 3, e, dato che queste ultime forniscono già una descrizione completa di tali funzioni, da questo punto di vista lo studio delle FTG di ordine 6 ha un interesse limitato.

Tuttavia, trattandosi delle funzioni di ordine più elevato che sono risolubili in maniera completa, il loro studio acquista interesse per la complicata struttura di singolarità che ne deriva, e dà un'idea di

quali siano le difficoltà che ci si deve attendere di incontrare nella trattazione delle FTG di ordine elevato. Le equazioni base a cui soddisfano le funzioni in questione sono:

$$A_6^6 + T_6^6 = 1 \quad (80)$$

$$A_6' = T_6^5 \quad (81)$$

$$T_6' = -A_6^5$$

Per trovare la connessione con le FTG di ordine 3 e con le funzioni ellittiche, conviene seguire uno studio del tutto analogo a quello indicato nel §II.1 per risalire alle FTG di ordine frazionario partendo da quelle di ordine intero. Più precisamente si pone

$$\begin{aligned} A_6^2(x) &= A_3(\phi) \\ T_6^2(x) &= T_3(\phi) \end{aligned} \quad (82)$$

ove ϕ è un'opportuna funzione di x da determinare, soddisfacente $\phi(0) = 0$.

Con la sostituzione (82), la (80) è identicamente verificata. È facile controllare, derivando le (82) rispetto a x , e sfruttando le (81), che si arriva a un'equazione per ϕ del tipo della (26), in cui (in accordo con le definizioni (82)) si deve porre $p = 3$, $q = \frac{1}{2}$:

$$\frac{d\phi}{dx} = \pm 2 \sqrt{A_3(\phi)T_3(\phi)} \quad (83)$$

La necessità del doppio segno in questa equazione è evidente, se p.es. si considera che, quando x cresce a partire da $x = 0$ lungo l'asse reale, ϕ deve rimanere confinato tra 0 e m_3 e oscillare tra questi due valori (perché A_6^2 , T_6^2 in tali condizioni sono sempre reali e non

negativi). Si può controllare che si ha

$$\pm \frac{d\phi}{2 \sqrt{A_3(\phi)T_3(\phi)}} = d \left\{ 2^{-2/3} 3^{-1/2} \operatorname{arc}(A_3+T_3) \left[2^{4/3} A_3(\phi)T_3(\phi) \right] \right\}$$

Per verificare questa formula di devono usare la (20) e la (18'), con qualche cura per il controllo dei segni (si veda anche la nota ¹⁵).

Dalla (83) si ottiene quindi (ricordando che $\phi(0) = 0$, e l'andamento già descritto nella parte I delle funzioni A_3T_3, A_3+T_3):

$$A_3(\phi)T_3(\phi) = 2^{-4/3} (A_3+T_3) \left[2^{2/3} 3^{1/2} x - m_3 \right] = \left[A_6(x)T_6(x) \right]^2 \quad (84)$$

sfruttando ancora le (82).

E' questa la relazione base che lega le FTG di ordine 6 a quelle di ordine 3 e, in definitiva, alle funzioni ellittiche di tipo equianarmonico.

Prima di far intervenire esplicitamente queste ultime, facciamo qualche considerazione sulla periodicità delle funzioni. Dalla discussione svolta nella Parte I si vede che la funzione $A_6^2 T_6^2$ è periodica sull'asse reale con periodo m_6 (si comporta infatti da questo punto di vista come $\sin^2 x \cos^2 x$, che ha per periodo $\frac{\pi}{2} = m_2$). La (84) mostra che effettivamente questo è un periodo della funzione. Infatti dalla formula (5) si è già trovato che $m_6 = 2^{-2/3} 3^{1/2} m_3$, così che l'argomento di (A_3+T_3) nella (84) dipende da x attraverso la combinazione $\frac{3m_3}{m_6}x$, il che garantisce che m_6 è un periodo (più precisamente, quello reale). Restando sull'asse reale, ed estraendo la radice quadrata, si trova che A_6T_6 ha periodo $2m_6$, come deve; più avanti si vedrà che il periodo di A_6 e T_6 risulta essere $4m_6$.

Per introdurre le funzioni ellittiche, conviene utilizzare le formule collegative (Tabella I nel §I.3) e poi sfruttare la prima delle (46), ottenendo ³⁶⁾:

$$[A_6(x)T_6(x)]^2 = 2^{-4/3} \left(-\frac{1}{S_3} + \frac{1}{A_3}\right) (2^{2/3} 3^{1/2} x) = 2^{-4/3} \frac{1-T_3}{A_3} (2^{2/3} 3^{1/2} x) \\ = 2^{-4/3} \mathcal{P}(2^{2/3} x|1)]$$

e ricordando che per la $\mathcal{P}(u|1)$ si ha $e_2 = 2^{-2/3}$, si può scrivere ³⁷⁾:

$$A^2 T^2(x) = \frac{e_2^2}{\mathcal{P}\left(\frac{x}{e_2} | 1\right)} \quad (85)$$

Dalla (85) si possono già determinare alcune caratteristiche del comportamento delle FTG di ordine 6. Infatti i poli della $\mathcal{P}u$ corrispondono agli zeri delle funzioni; e, dato che per la (80) tali zeri non possono essere comuni ad A e T , ne segue che tutti gli zeri di tali funzioni sono semplici (come è da aspettarsi in base al comportamento conosciuto sull'asse reale). Invece le singolarità di A e T , comuni alle due funzioni (v. §II.2) corrispondono agli zeri della $\mathcal{P}u$; essendo questi ultimi semplici, è confermato che tutte le singolarità dominanti delle funzioni sono dei punti di diramazione di tipo radice quarta ove le funzioni divergono (in accordo con la prima delle (28)). Da un paragone superficiale con il caso $n=4$, trattato nel §II.5, si potrebbe pensare che, oltre alla funzione $A^2 T^2$, anche altre combinazioni di A e T che danno luo-

36) Come nel §II.4, si è omessa l'indicazione dell'invariante g_2 , che è nullo.

37) Poiché le considerazioni seguenti verranno svolte solo in termini della $\mathcal{P}u$, senza più utilizzare le FTG di ordine 3, da ora in poi si può sopprimere dappertutto l'indice 6, perché non c'è più rischio di confusione. Anche le funzioni ellittiche verranno talvolta indicate con $\mathcal{P}u, \mathcal{P}'u$ (con $u = x/e_2$) o addirittura con $\mathcal{P}, \mathcal{P}'$.

go a una potenza complessiva uguale a 4 non abbiano, in corrispondenza delle singularità di A e T, dei punti di diramazione: invece ciò non è vero, e tali punti di diramazione sono presenti nella grande maggioranza delle combinazioni di A e T, anche quando tali combinazioni in questi punti assumono valori finiti e non nulli. La sola eccezione, oltre ad A^2T^2 , si ottiene in maniera ovvia: è sufficiente ricavare Φ_u dalla (85), derivare rispetto a x e vedere quale è la combinazione delle FTG che corrisponde a Φ'_u :

$$\Phi' \left(\frac{x}{e_2} \mid 1 \right) = e_2 \frac{d}{dx} \frac{e_2^2}{A^2(x)T^2(x)} = \frac{1}{2} \left[S^3(x) - \frac{1}{S^3(x)} \right] \quad (86)$$

ricordando che $e_2^3 = 1/4$.³⁸⁾

E' chiaro che una qualunque combinazione di A^2T^2 e $S^3 - \frac{1}{S^3}$ (in cui si può anche utilizzare la (80)) è priva di punti di diramazione: tuttavia la maggioranza delle combinazioni più semplici di A e T non può essere posta sotto questa forma. Prima di vedere come si comportano le FTG nelle vicinanze della singularità, è bene ribadire che si cercherà di mantenere, come è stato fatto per le FTG di ordine 4, le proprietà di doppia periodicità delle funzioni e di simmetria rotazionale (esprese dalle formule(29) , con e = radice sesta dell'unità) su di un solo foglio della superficie di Riemann, tagliato in maniera opportuna.

Per cominciare, si consideri la funzione AT, proporzionale per la (85) a $\Phi^{-1/2}$. Per studiare nel modo più conveniente la struttura da scegliere per i tagli di tale funzione, in Fig. 9 si è diviso l'intero piano complesso in un pavimento di triangoli equilateri di lato m, aventi un la-

38) Derivando rispetto a x ambo i membri della (86), si ottiene (usando la (80)):

$$\Phi'' \left(\frac{x}{e_2} \mid 1 \right) = \frac{6e_2^4}{A^4(x)T^4(x)} = 6\Phi^2 \left(\frac{x}{e_2} \mid 1 \right) ,$$

cioè una formula già nota.

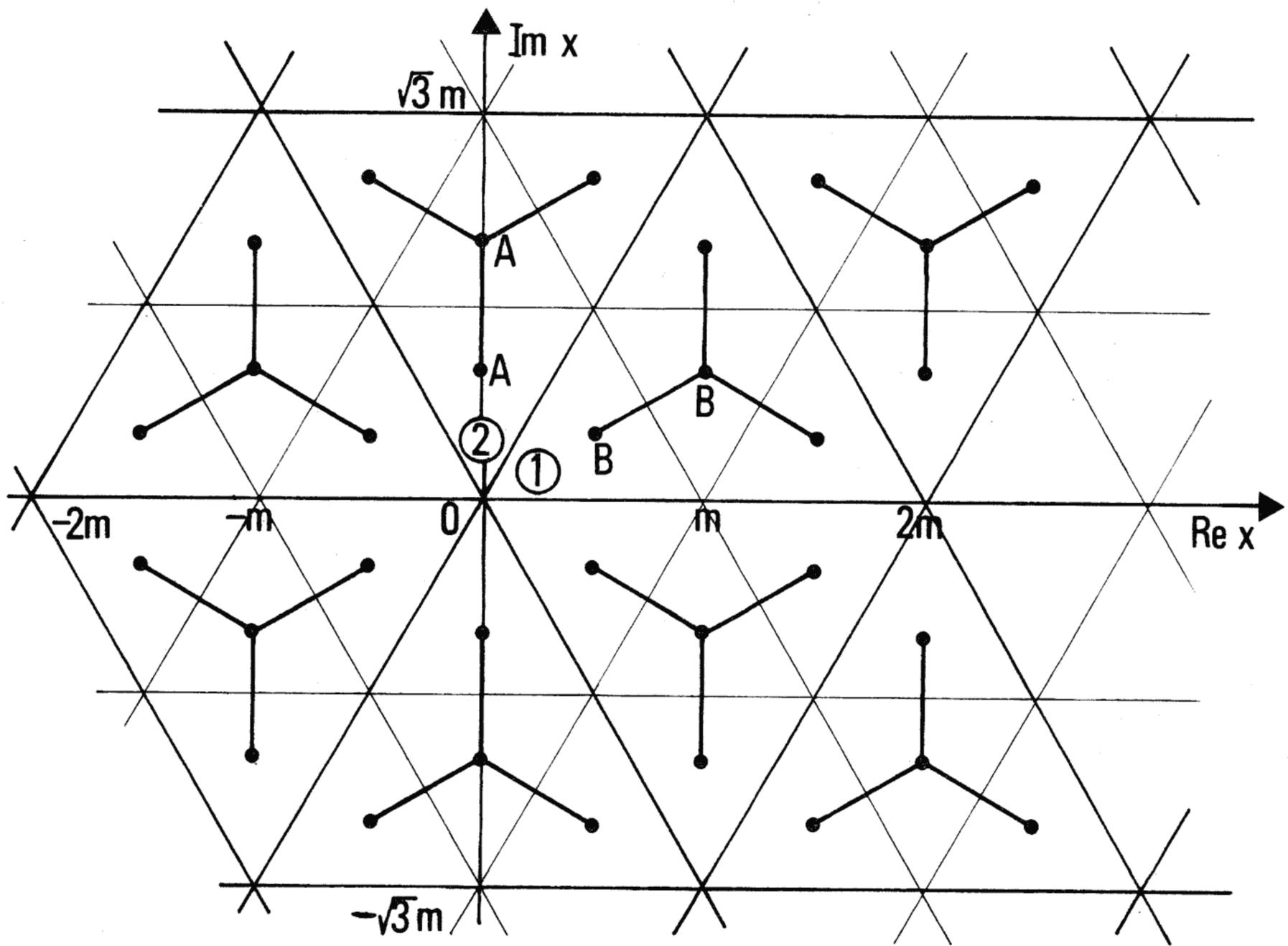


fig.9

to parallelo all'asse reale, in modo che uno dei vertici coincida con l'origine. Tali triangoli sono raggruppati a quattro per volta in triangoli più grandi (di lato $2m$), che formano una struttura analoga, e sono delimitati in figura dalle linee più marcate.

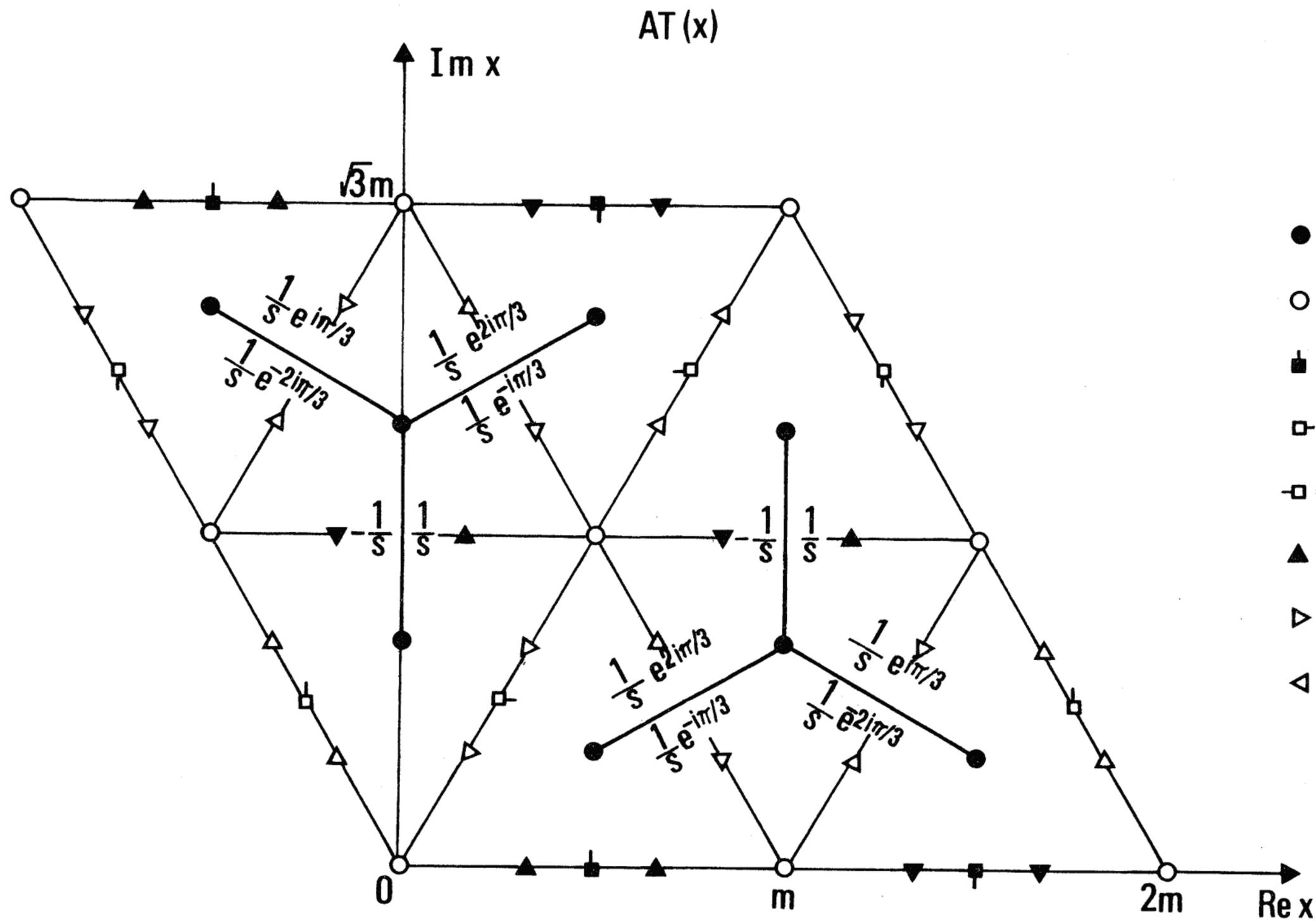
A causa della formula (85), e del fatto (già discusso) che m/e_2 rappresenta il periodo reale della Φ_u , si trova che i vertici dei triangoli piccoli corrispondono ai poli della Φ_u e quindi agli zeri (semplici) di AT , mentre, per confronto con la figura 4, i centri degli stessi triangoli corrispondono agli zeri della Φ_u e quindi ai punti di diramazione di AT . Inoltre, se vogliamo che la funzione AT non attraversi alcun taglio lungo l'asse reale, soddisfi la prima delle (29) [come conseguenza delle (29) stesse] con $e =$ radice sesta dell'unità, e sia periodica con periodo $2m$, dalla combinazione delle varie richieste si conclude che i tagli della funzione AT non devono attraversare nessuna delle rette che costituiscono i lati dei triangoli grandi: essi quindi possono soltanto congiungere i punti di diramazione che (a gruppi di quattro) sono contenuti all'interno di detti triangoli (che verranno anche chiamati "triangoli base"). Si conclude facilmente che la sola struttura dei tagli consistente con tutte le proprietà di simmetria richieste è quella a forma di "stella a tre punte" mostrata in Fig. 9. Infatti questa figura è la sola che vada in se stessa sia per una traslazione orizzontale di $2m$ (pari al lato di un triangolo base) che per rotazione di 60° . E' anche chiaro che, come conseguenza della periodicità della Φ_u , la funzione è nota su tutto il piano complesso una volta dati i suoi valori in due triangoli base adiacenti. Prendiamo come riferimento i due triangoli aventi un vertice comune nell'origine, indicati in Fig. 9 con i simboli 1 e 2. I valori della funzione AT lungo il loro perimetro si ottengono in maniera banale, a partire dai valori della Φ_u mostrati in Fig. 4, ricordando che la funzione è positiva nel tratto $(0,m)$ dell'asse reale, e tenendo presente che, estraendo la radice quadrata, si deve avere un cam-

biamento di segno ogni volta che si passa attraverso uno zero. Resta invece da determinare come si comporta la funzione dai due lati dei tagli contenuti nei triangoli in questione.

Il ragionamento con cui si arriva ai valori indicati nella Fig.10 (che riporta i triangoli di riferimento su scala ingrandita) è abbastanza complicato, e vale la pena di esplicitarne in dettaglio i punti salienti, perché lo stesso modo di procedere si applica a tutte le FTG di ordine 6.

Si parte dalla conoscenza dell'andamento della Φ_u lungo l'asse immaginario, ove la funzione è reale e negativa dal polo (nell'origine) fino al primo zero, poi diviene reale e positiva con valore massimo e_2 (nel punto a metà strada tra i due zeri) fino allo zero successivo, e quindi ritorna reale e negativa. In corrispondenza, Φ'_u è sempre immaginaria pura, con parte immaginaria inizialmente negativa lungo l'asse immaginario positivo. Applicando le (36) si può ottenere Φ_u e Φ'_u lungo tutti i raggi vettori uscenti dall'origine e passanti per gli zeri più vicini: si ottengono per la Φ_u gli stessi valori che si hanno sull'asse immaginario, moltiplicati per un fattore di fase costante $e^{\pm 2i\pi/3}$, e per la Φ'_u sempre gli stessi valori immaginari puri, con parte immaginaria iniziale alternativamente positiva e negativa. Indicando con ρ il valore assunto dalla funzione Φ_u/e_2 nel tratto AA dell'asse immaginario (ρ parte da zero, raggiunge un massimo uguale a 1 e poi ritorna a zero) si trovano immediatamente i valori del modulo della funzione AT sui due lati del taglio AA; e, sfruttando opportunamente la periodicità e la simmetria per rotazione di 60° , si arriva al valore della funzione (a meno di un segno, che deve essere diverso dai due lati di ciascun taglio), lungo tutti i tagli riportati in Fig. 10. Resta da determinare la distribuzione dei segni.

Prendiamo per esempio il taglio BB, caratterizzato da valori di u



- VALORI DELLA FUNZIONE
- punti di diramazione
 - zeri
 - $2^{-1/3}$
 - $2^{-1/3} e^{i\pi/3}$
 - ◻ $2^{-1/3} e^{-2i\pi/3}$
 - ▲ $2^{-2/3}$
 - ▷ $2^{-2/3} e^{i\pi/3}$
 - ◁ $2^{-2/3} e^{-2i\pi/3}$
 - ▣ $-2^{-1/3}$
 - ◻ $2^{-1/3} e^{2i\pi/3}$
 - ◻ $2^{-1/3} e^{-i\pi/3}$
 - ◻ $-2^{-2/3}$
 - △ $2^{-2/3} e^{2i\pi/3}$
 - ▽ $2^{-2/3} e^{i\pi/3}$

fig.10

dati da $r e^{i\pi/6}$ (r reale > 0): lungo di esso si ha $\Phi u = e_2 \rho e^{2i\pi/3}$, $\Phi' u = i\rho'$ [ρ, ρ' reali, soddisfacenti $\rho^3 + \rho'^2 = 1$ come conseguenza della (31), e con ρ che si annulla agli estremi del taglio (punti B) ed è positivo tra di essi]. Calcoliamo $\Phi(u e^{i\epsilon})$, con ϵ infinitesimo:

$$\Phi(u e^{i\epsilon}) \simeq \Phi u + \Phi' u (i\epsilon) = e_2 \rho e^{2i\pi/3} - r\rho' \epsilon e^{i\pi/6}.$$

Nell'intorno, p.es., dello zero B più vicino all'origine ρ' è positivo, mentre ρ cambia di segno. Supponendo per fissare le idee $\epsilon < 0$, e ponendo $\delta = -r\rho'\epsilon/e_2 > 0$, si ha:

$$\operatorname{Re} \Phi(u e^{i\epsilon}) = e_2 (\rho \cos \frac{2\pi}{3} + \delta \cos \frac{\pi}{6}) = \frac{e_2}{2} (-\rho + \delta\sqrt{3})$$

$$\operatorname{Im} \Phi(u e^{i\epsilon}) = e_2 (\rho \sin \frac{2\pi}{3} + \delta \sin \frac{\pi}{6}) = \frac{e_2}{2} (\rho\sqrt{3} + \delta)$$

Si vede che la fase di $\Phi(u e^{i\epsilon})$, quando ρ cambia di segno passando da valori negativi a valori positivi, varia dal quarto al secondo quadrante passando per il primo quadrante: perciò essa, nel limite $\delta \rightarrow 0$, va "letta" come $e^{2i\pi/3}$. Invece per $\epsilon > 0$, cioè $\delta < 0$, la stessa fase varia dal quarto al secondo quadrante passando per il terzo, e quindi va "letta" come $e^{-4i\pi/3}$. Estraendo la radice quadrata dai due lati del taglio si ottengono quindi due valori diversi, che, inseriti nella (85), portano ai valori di AT riportati in Fig. 10 (ove si è posto $s = \sqrt{r\rho/e_2}$).

Lo stesso argomento si può ripetere per gli altri tagli; ragionamenti dello stesso tipo possono essere utili anche per determinare rapidamente il valore di AT sui lati dei triangoli piccoli divisi a metà dai tagli.

Per proseguire ulteriormente in questa analisi, è utile richiamare la formula (diretta conseguenza di (80) e (85)):

$$S^3 + \frac{1}{S^3} = \frac{1}{A^3 T^3} = 4(\Phi u)^{3/2}$$

ove l'andamento di $(\Phi u)^{3/2}$ è univocamente determinato sulla base delle

considerazioni svolte in precedenza. Combinando tale formula con le (86) si trovano immediatamente le relazioni: ³⁹⁾

$$\begin{aligned} S^3 &= 2 \wp^{3/2} + \wp' \\ 1/S^3 &= 2 \wp^{3/2} - \wp' \end{aligned} \tag{87}$$

In questo modo è possibile determinare il comportamento di S^3 e $1/S^3$ in tutto il piano complesso.

E' interessante vedere che nei punti corrispondenti ai poli di \wp e \wp' (punti di regolarità per A e T) le (87) presentano dei poli tripli o degli zeri tripli, a seconda che le divergenze delle due funzioni in gioco si compensino o no: ne segue che i poli e gli zeri di S e $1/S$ sono semplici, come è da aspettarsi. Invece i punti di diramazione corrispondenti agli zeri di \wp (punti di singolarità di A e T) ancora sussistono, anche se le funzioni (87) assumono, in corrispondenza di tali punti, dei valori finiti e non nulli (e precisamente $\pm i$); e quindi si mantiene anche per tali funzioni la caratteristica struttura dei tagli mostrata in Fig. 9. La stessa cosa si può dire per le funzioni S e $\frac{1}{S}$, ottenute estraendo la radice cubica delle (87) (secondo una prescrizione che verrà spiegata più avanti): inoltre per tali funzioni risulterà che nei punti di diramazione situati al centro delle stelle dei tagli, il valore non è definito, ma si possono avere tutte le possibili radici cubiche di $+i$ (o di $-i$), a seconda del modo in cui si arriva a tali punti. Nello studio di S (o di $1/S$) si ha naturalmente un notevole aiuto tenendo conto delle richieste di periodicità e di simmetria per rotazione di 60° (espressa da una relazione del tipo della prima delle (29), con $\epsilon =$ radice sesta dell'unità):

39) Da ora in poi, salvo che nei casi di ambiguità, verrà soppresso l'argomento u nella specificazione delle funzioni ellittiche. Si noti che le due funzioni (87) sono effettivamente l'una l'inversa dell'altra, a causa della relazione $\wp'^2 = 4\wp^3 - 1$.

$$S(ex) = eS(x) \quad (88)$$

E' immediato controllare che, come conseguenza di questa relazione, i valori di S nei sei punti di diramazione più vicini all'origine sono le sei radici seste di -1 (indicate, come in precedenza, con il simbolo η), prese nell'ordine girando in senso antiorario. Per fissarne il valore, si può ripetere il procedimento [applicato alle funzioni (82)] di sviluppo nell'intorno di uno di tali punti, già seguito in precedenza: si trova così che nel punto B di Fig. 9 più vicino all'origine S vale $\eta_1 = e^{i\pi/6}$ 40).

Per poter presentare in modo esauriente il comportamento di S nel piano complesso (da cui si ricava immediatamente quello di $1/S$) è bene trovare una formulazione adatta dell'espressione della funzione lungo i tagli, analoga a quella già utilizzata in Fig. 8 per A_4 e T_4 .

Considerando, per fissare le idee, ancora il taglio AA di Fig. 9, e usando la notazione introdotta in precedenza, lungo di esso la prima delle (87) può essere scritta nella seguente maniera

$$S^3 = \pm \rho^{3/2} + i\rho'$$

ove il segno $+$ si ha a destra del taglio, il segno $-$ a sinistra, in accordo con le indicazioni di Fig. 10. Ricordando che ρ' (nella direzione che si allontana dall'origine) cresce da -1 a 1 , e che vale la relazione (già ricordata) $\rho^3 + \rho'^2 = 1$, è evidente che si può definire opportunamente una variabile reale ϕ tale da aversi $\rho' = \sin\phi$, $\rho^{3/2} = |\cos\phi|$: di conseguenza S^3 dai due lati del taglio vale rispettivamente $e^{i\phi}$ e

40) Da ora in poi si userà la notazione $\eta_k = e^{i\left[\frac{\pi}{6} + (k-1)\pi/3\right]}$

$-e^{-i\phi}$. Scegliamo ϕ in modo tale che sia $S^3 = e^{i\phi}$ alla sinistra del taglio: ciò implica $\cos\phi \leq 0$. L'intervallo di variazione per ϕ si determina, a meno di multipli di 2π , imponendo che nel punto di diramazione più vicino all'origine entrambe le caratterizzazioni di S^3 assumano il valore -1 ; ne segue che ϕ può coprire l'intervallo $(\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ o qualunque altro intervallo spostato rispetto ad esso di un multiplo di 2π . Tuttavia un'ulteriore restrizione su ϕ (che lo determina a meno di multipli di 6π) si ottiene imponendo che anche la funzione S nel punto di diramazione considerato assuma il valore $\eta_2 = i$ (richiesto dalla (88)). Questa richiesta è compatibile con la scelta $\frac{3\pi}{2} \geq \phi \geq \frac{\pi}{2}$ (modulo 6π), e implica che, nell'estrarre la radice cubica, $-e^{-i\phi}$ vada letta come $e^{i(3\pi-\phi)}$. Sulla sinistra del taglio, quindi, S vale $e^{i\phi/3}$, e sulla destra $e^{i(\pi-\phi/3)}$. Tuttavia è sempre possibile, per ragioni di convenienza, ridefinire ϕ in modo da avere per esso un intervallo di variazione (di ampiezza π) scelto a piacere: p.es., sostituendo ϕ con $\frac{3\pi}{2} - \phi$ si ottiene $0 \leq \phi \leq \pi$, e S vale $e^{i(\frac{\pi}{2} - \frac{\phi}{3})}$ a sinistra del taglio e $e^{i(\frac{\pi}{2} + \frac{\phi}{3})}$ a destra.

Lo stesso ragionamento si può ripetere anche per gli altri tagli della stella, ed estendere, mediante le formule di simmetria più volte ricordate, alle altre strutture di singolarità: si ottiene in questo modo il quadro mostrato in Fig. 11 per la funzione S , da cui è immediatamente deducibile quello per $1/S$ (si è assunta per tutti i tagli la caratterizzazione $0 \leq \phi \leq \pi$ andando da una punta al centro della stella). Si noti che nei quattro punti di diramazione appartenenti a una stella la funzione S assume tutti e sei i valori di η_k : ai vertici si hanno i tre valori con k pari (o dispari), e in corrispondenza del centro si hanno gli altri tre valori (con parità opposta di k) a seconda dello "spicchio" di piano complesso, delimitato dai bracci della stella, entro cui ci si muove per raggiungere il punto in questione. In Fig. 11 si è posto $r = e^{i\phi/3}$, $r^* = e^{-i\phi/3}$. È da notare che la discontinuità di S attraverso un qualsiasi taglio (attraversato in senso orario rispetto al centro della stella) è data dal prodotto $(2i \sin\phi/3) \cdot \eta$, ove η è il valore della funzione all'estremo libero del taglio (punta della stella).

Come già affermato in precedenza, il grafico di Fig. 11 può essere uti-

lizzato anche per rappresentare la funzione $1/S$, modificando il significato dei simboli grafici (cioè, p.es., scambiando tra loro il simbolo indicante gli zeri con quello indicante i poli), sostituendo alle η_i i loro inversi (η_6 per η_1 , η_5 per η_2 , η_4 per η_3 , e viceversa), e scambiando tra loro r e r^* .

Un'altra interessantissima proprietà del grafico di Fig. 11 si può ottenere congiungendo con dei segmenti di retta le punte di diverse stelle di singolarità più vicine tra loro (alcuni esempi sono dati dalle linee tratteggiate in Figura). Tali segmenti intersecano i lati dei triangoli base in corrispondenza dei punti ove la funzione vale una radice sesta dell'unità. In questo modo il piano complesso viene diviso in un pavimento di esagoni con il lato uguale alla lunghezza di un taglio (pari a $m/\sqrt{3}$), centrati negli zeri e nei poli della funzione. Analogamente a quanto già visto per S_4 , anche qui è immediato verificare che, percorrendo il perimetro interno di uno di tali esagoni (e rimanendo ovviamente sempre dallo stesso lato dei tagli) la funzione percorre con continuità l'intero cerchio unitario. E' dunque immediato concludere che la funzione, all'interno di uno di tali esagoni, ha modulo sempre < 1 (se al centro c'è uno zero) o sempre > 1 (se c'è un polo). Quattro di tali esagoni, adiacenti e disposti in modo simmetrico (come, p.es. quelli delineati in Fig. 11) formano un campo fondamentale della funzione (che si ottiene anche con due triangoli base adiacenti); è facile controllare che l'area di quattro esagoni è uguale a quella di due triangoli. La distribuzione dei valori della funzione in un campo fondamentale non è simmetrica; per S , che in ogni campo ha uno zero e tre poli, si hanno tre esagoni ove $|S| > 1$ e uno solo ove $|S| < 1$, mentre per $1/S$, che in ogni campo ha tre zeri e un polo (con residuo uguale a 1), si ha l'opposto.

Combinando il risultato di Fig. 11 con quello di Fig. 10 è possibile

ottenere l'andamento nel piano complesso di un qualsiasi monomio di grado pari in A e T (includente eventualmente potenze negative), perché esso può essere sempre scritto in termini di AT e S . I casi più interessanti sono quelli di $A^2 = S A T$ e $T^2 = \frac{AT}{S}$, i cui diagrammi sono mostrati in Fig. 12a e 12b rispettivamente. Nelle Figure si è posto $\gamma = e^{i\phi/3} (2\sin\phi)^{-1/3}$, con la stessa convenzione per ϕ usata in Fig. 11, e prendendo il valore aritmetico per la radice cubica.⁴¹⁾

Per ottenere il comportamento di A e T si deve estrarre ulteriormente la radice quadrata da A^2 e T^2 . Tuttavia tale estrazione richiede necessariamente l'introduzione di nuovi tagli oltre a quelli già noti di A^2 e T^2 . Che sia questo il caso si vede immediatamente p.es. dalla considerazione che T^2 è reale, finito e non negativo sul perimetro di tutti i triangoli base: lungo uno di questi perimetri quindi la funzione T è reale e finita, e deve cambiare di segno ogni volta che attraversa uno zero (semplice).

Ma gli zeri su di un perimetro sono tre: quindi per non cadere in contraddizione, è necessario che vi sia un ulteriore cambiamento di segno, e ciò implica la presenza di un nuovo taglio. E' ovvio che tali tagli addizionali devono essere disposti in modo da intersecare il perimetro di tutti i triangoli base: tuttavia, se vogliamo che l'asse reale non sia intersecato da tagli, e che si mantengano le formule di simmetria (29) (con $\epsilon =$ radice sesta dell'unità) e la periodicità $4m$, si viene a ripetere, su scala ingrandita, lo stesso ragionamento svolto a proposito dei tagli trovati in precedenza: cioè i nuovi tagli richiesti devono unire i centri di quattro stelle disposte a loro volta a stella, all'interno di un triangolo di lato $4m$ e contenente quattro triangoli base

(41) E' interessante verificare sui diagrammi di Fig.12 le proprietà di simmetria già menzionate, e la validità della (80) lungo tutti i tagli.

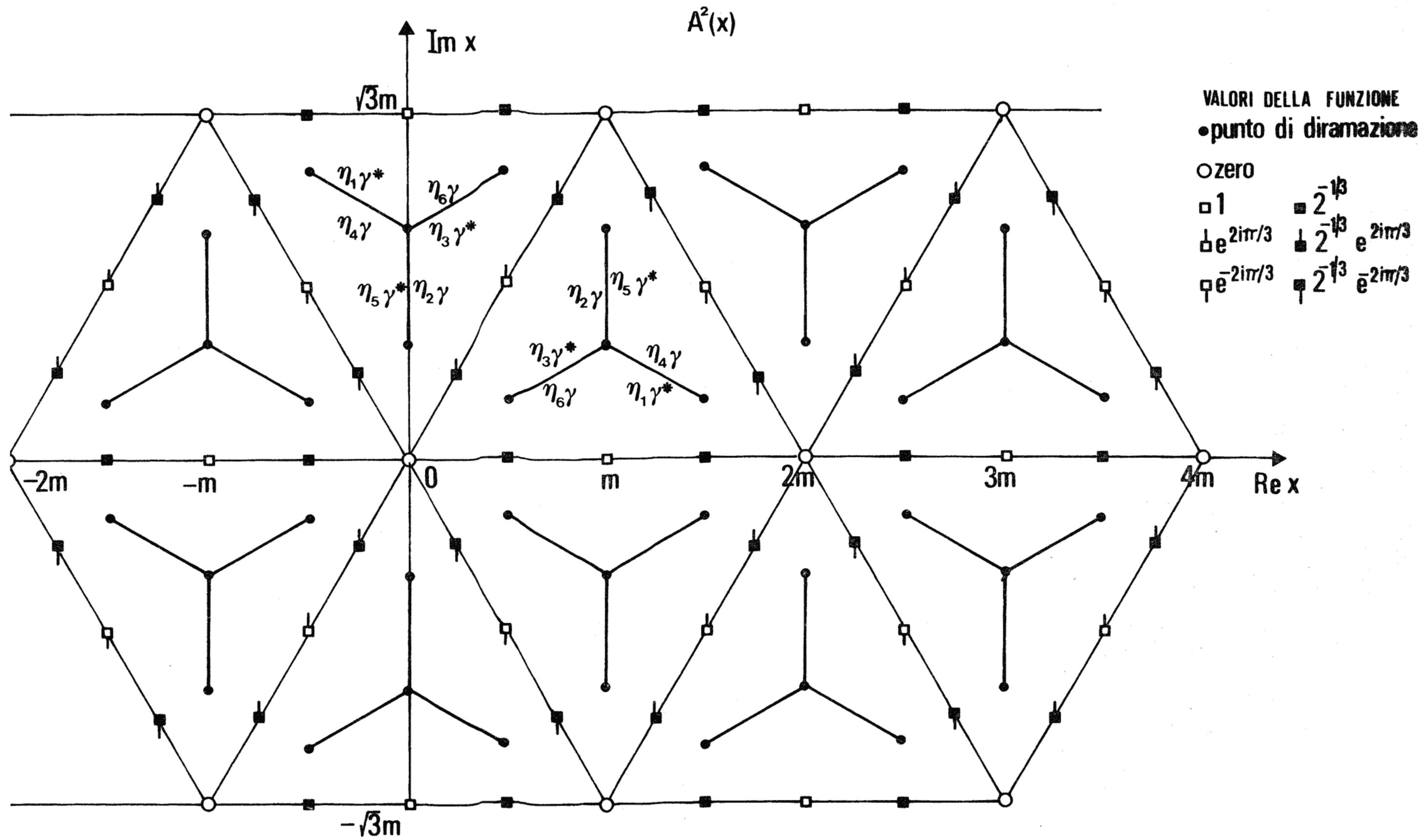


fig. 12a

(v. Fig. 13), ove i nuovi tagli sono indicati con segmenti tratteggiati). Per ragioni di chiarezza del disegno, non è stata riportata la specificazione dei valori delle funzioni in corrispondenza dei tagli, per così dire, "ereditati" da A^2 e T^2 : tali valori sono ottenibili da quelli riportati in Fig. 12 a meno di un segno, che può essere dedotto per confronto con i valori dei punti più vicini.⁴²⁾ Sui nuovi tagli in Fig. 13 sono indicati, in corrispondenza del loro punto di mezzo, entrambi i valori assunti da $A(x)$ dai due lati del taglio. Invece per $T(x)$ in tali punti si ha uno zero, che però non è uno zero "normale", perché la funzione attraversandolo non cambia segno (in quanto attraversa allo stesso tempo anche il taglio).

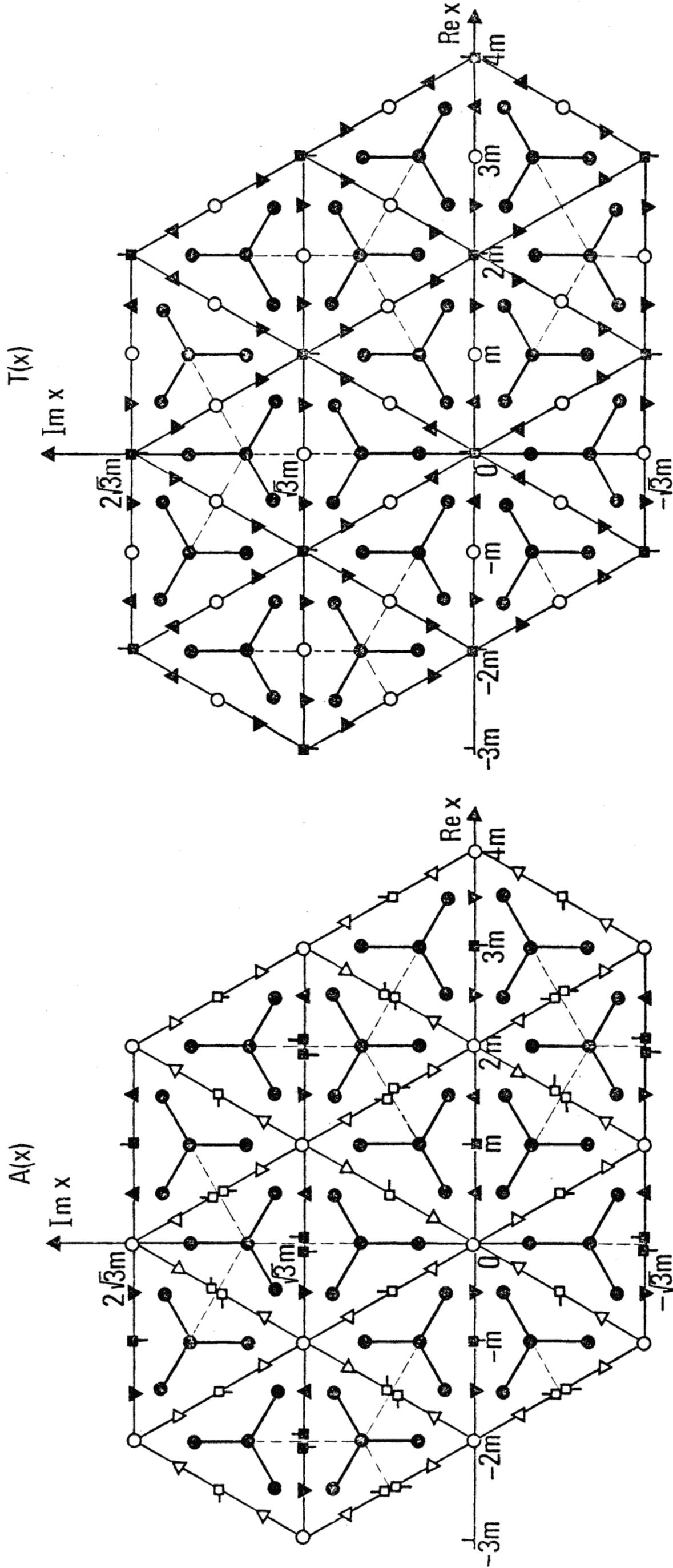
Manipolando opportunamente le formule (85) e (87) si arriva alla seguente espressione compatta per $A(x)$ e $T(x)$:

$$\frac{A(x)}{T(x)} = \left[\frac{1}{2} \left(1 \pm \frac{\rho' u}{2(\rho u)^{3/2}} \right) \right]^{1/6} \quad (89)$$

ove va ricordato che $u = \frac{x}{e_2}$, e che per la $\rho^{3/2}$ si deve utilizzare la caratterizzazione dei tagli indicata in Fig. 10. Gli schemi di Fig. 13 si possono ottenere anche a partire da queste formule.

È interessante far notare che alcune combinazioni simmetriche di A e T hanno un numero di punti di diramazione minore di quello delle funzioni base. È questo il caso della funzione A^2+T^2 (e, come diretta conseguenza, anche di A^4+T^4), per cui si cancellano tutti i tagli paralleli all'asse immaginario (come il taglio AA di Fig. 9). All'estremo libero di tali segmenti A^2+T^2 ha uno zero semplice, mentre all'altro estremo (corrispondente, nelle Figure precedentemente mostrate, al centro della struttura a stella) presenta una singolarità di tipo particolare,

42) Lungo i tagli in questione, le funzioni sono sempre espresse da un'opportuna radice dodicesima di -1 moltiplicata per $e^{\pm i\phi/6} (2\sin\phi)^{-1/6}$ (radice aritmetica).



- punto di diramazione
 - zero
- VALORI DELLE FUNZIONI:
- ◼ 1 ◻ $e^{i\pi/3}$ ◼ $e^{2i\pi/3}$ ◼ $2^{1/6} e^{i\pi/3}$ ◼ $2^{1/6} e^{2i\pi/3}$
 - ◼ -1 ◻ $e^{-2i\pi/3}$ ◻ $e^{-i\pi/3}$ ◻ $2^{1/6} e^{-2i\pi/3}$ ◻ $2^{1/6} e^{-i\pi/3}$

fig. 13

ove la funzione diviene infinita da un lato della restante struttura di tagli, e si annulla dall'altra parte.⁴³⁾

Per avviare a conclusione lo studio di queste funzioni, resta da parlare del problema delle formule di addizione e sottrazione. E' chiaro che delle formule di tal tipo, valide senza ambiguità su tutto il piano complesso, possono essere scritte solo per le funzioni che non hanno punti di diramazione, e in particolare per A^2T^2 e $S^3 - \frac{1}{S^3}$, per cui si possono sfruttare direttamente le formule di addizione per la $\mathbb{P}u$. Tuttavia l'espressione esplicita di tali formule risulta essere assai complicata e farraginoso, e non sembra possibile il riuscire a metterla sotto una forma semplice, come è stato ottenuto per $n=3$ e $n=4$. Quindi tali formule non verranno riportate. Più praticabili, pur se ancora piuttosto farraginose, sono invece le formule di duplicazione che possono essere espresse tutte in termini di A^2T^2 con la sostituzione $(T^6 - A^6)^2 = 1 - 4A^6T^6$:

$$A^2T^2(2x) = \frac{4A^2T^2(T^6 - A^6)^2}{1 + 32A^6T^6} \quad (90)$$

$$\frac{S^3(2x)}{1/S^3(2x)} = \frac{1}{2} \frac{(1 + 32A^6T^6)^{3/2} \mp (1 - 80A^6T^6 - 128A^{12}T^{12})}{[2AT(T^6 - A^6)]^3}$$

43) Probabilmente questo comportamento va connesso al fatto che, in un punto di diramazioni divergente di tipo radice quadrata (quale è mostrato da A^2+T^2) deve uscire un numero dispari di tagli per non precludere l'accesso a una parte della superficie di Riemann. Poiché le proprietà di simmetria delle funzioni richiedono che da un tale punto escano due tagli, esso non può comportarsi come un punto di diramazione ordinario.

Queste formule possono essere usate correntemente sull'asse reale, ove l'estrazione delle radici non presenta problemi (si deve solo fare attenzione ai segni delle funzioni, tenendo conto dell'andamento descritto nella Parte I), combinate in modo da ricavare le formule per A e T. Il loro uso può essere esteso senza eccessive complicazioni a una striscia di piano complesso intorno all'asse reale, sufficientemente lontana dai tagli, di spessore progressivamente decrescente con l'allontanarsi dall'origine, e alle analoghe strisce disposte intorno alle rette che delimitano i perimetri dei triangoli base (e che, per A e T, non incontrano tagli). Nelle vicinanze dei tagli, invece, con l'eccezione delle poche combinazioni prive di punti di diramazione, le (90) non sono più utilizzabili.

Come nei casi precedenti, concludiamo con gli sviluppi in serie di Taylor delle funzioni intorno a $x = 0$, che risultano:

$$A(x) = x - \frac{5}{42} x^7 + \frac{265}{6552} x^{13} - \frac{253595}{15685488} x^{19} + \dots$$

$$T(x) = 1 - \frac{x^6}{6} + \frac{25}{504} x^{12} - \frac{15775}{825552} x^{18} + \dots$$

$$S(x) = x + \frac{x^7}{21} - \frac{x^{13}}{819} + \frac{368}{980343} x^{19} \dots$$

in accordo col risultato generale ottenuto nella Parte I.

III. 8 Cenno alle funzioni di ordine 5.

Come già accennato nell'Introduzione, e discusso più in dettaglio nel § II.3, le funzioni di ordine 5 sono il caso più semplice di FTG per cui le proprietà di simmetria sfruttate nei casi precedenti non possono essere più mantenute insieme, e che quindi presentano una maggiore difficoltà nel loro studio. Ricollegandosi a quanto detto nella Parte I,

le due costanti b e m , che caratterizzano il comportamento di tali funzioni sull'asse reale,⁴⁴⁾ sono legate tra loro, come conseguenza della formula (8'), dalla relazione

$$b = \frac{\sqrt{5}-1}{2} m$$

Ne segue che un punto situato a distanza b da un estremo divide in rapporto aureo un segmento di lunghezza m ; analogamente, l'origine divide in rapporto aureo il segmento dell'asse reale che si estende da $-b$ a $+m$. La quantità $P = m+2b$, che nella Parte I era stata suggerita quale periodo delle funzioni sull'asse reale, vale $\sqrt{5} m$. In realtà si mostrerà che, se si vuole ottenere una ragionevole rappresentazione di tali FTG nel piano complesso, questa ipotesi non potrà essere mantenuta.

Come già discusso nel §II.2, nei punti di singolarità delle funzioni A e T (in particolare, nei punti $-b$ e $m+b$ dell'asse reale) si hanno dei punti di diramazione in cui la funzione diverge con potenza $-\frac{1}{3}$. Inoltre nel §II.3 si è visto che le proprietà di simmetria per rotazione di 72° (espresse dalle condizioni (29)) non sono compatibili con la periodicità reale P nel piano complesso, anche se opportunamente tagliato. Bisogna quindi lasciare cadere una delle due richieste. E' chiaro che è di gran lunga preferibile rinunciare alla periodicità P e mantenere invece le condizioni (29). Tuttavia sembra ragionevole il continuare a richiedere che, lungo l'asse reale (e, di conseguenza, su tutte le rette ottenute ruotando l'asse reale di multipli di 72°) le singolarità si susseguano con periodicità P . Questo fornisce una struttura di infinite singolarità dello stesso tipo, che si estende su tutto il piano complesso, e che è rappresentata nei diagrammi di Fig. 14. Aggiungiamo l'ulteriore ipotesi che per le funzioni A e T le suddette singolarità siano le sole esistenti. (E' chiaro che tale ipotesi,

44) Anche in questo paragrafo verrà omissa l'indice 5 in tutti i simboli.

suggerita dall'analogia con il caso $n=3$, deve essere verificata a posteriori).

In tali condizioni, resta da vedere come congiungere tali singolarità con un sistema di tagli che mantenga valide le condizioni (29), con $\epsilon =$ radice quinta dell'unità. La più semplice maniera di ottenere tale risultato presenta due diversi schemi di base (entrambi mostrati nella Fig. 14), ciascuno dei quali ammette una variante banale ottenuta riflettendo tutti i tagli rispetto all'asse reale. E' da notare che in entrambi i casi sull'asse reale le funzioni non si mantengono reali, e probabilmente neppure periodiche: per avere una funzione reale su tutto l'asse reale, infatti, da ogni punto di diramazione giacente su di esso dovrebbero partire due tagli, e ciò è incompatibile con le condizioni (29).⁴⁵⁾

Da questo esame preliminare non appare possibile ottenere ulteriori informazioni sul comportamento di tali funzioni: uno studio più approfondito richiede l'inversione di integrali abeliani del tipo

$$\int_0^x dx' (1+x'^5)^{-2/5} \quad \text{[questo è l'integrale che definisce } \text{arcS}(x) \text{]}, \text{ oppure}$$
$$\int_0^x dx' / \sqrt{1-4x'^5} \quad \text{[(questo integrale definisce } \text{arcAT}(x) \text{)]}, \text{ che l'Autore della}$$

presente nota non è assolutamente in grado di portare avanti. Si è ciononostante accennato al problema della determinazione di tali funzioni, perché appaia chiaro quanto è più grande la difficoltà di ottenere una soluzione rispetto ai casi già trattati. Ovviamente questa considerazione si

45) Sarebbe possibile mantenere le funzioni reali (e forse anche periodiche) sull'asse reale, e allo stesso tempo la validità delle (29), soltanto dividendo il piano complesso in tante regioni concentriche non comunicanti tra loro, delimitate da un perimetro a forma di stella a cinque punti sempre più grande. E' chiaro che tale soluzione non ha interesse matematico.

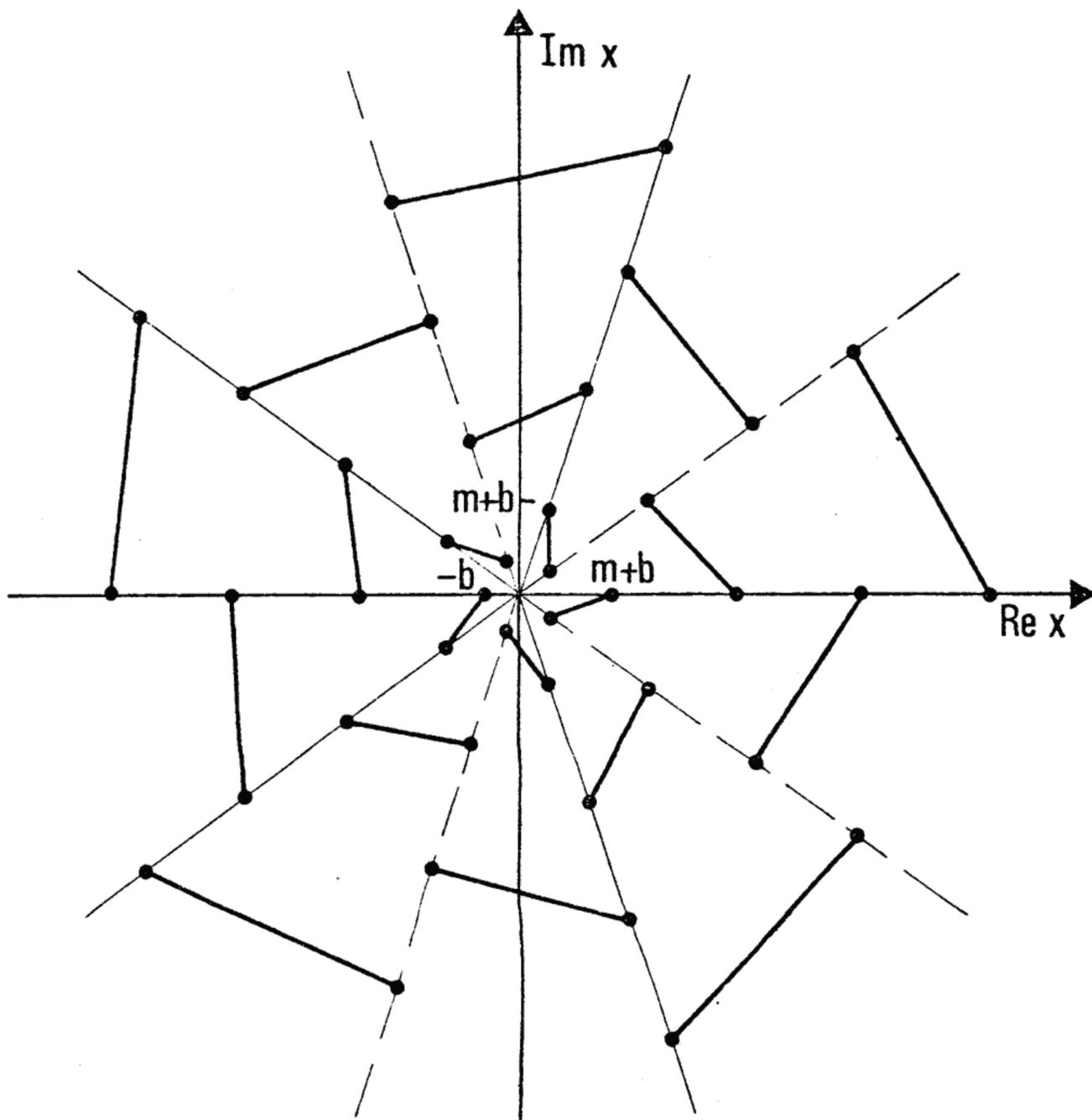
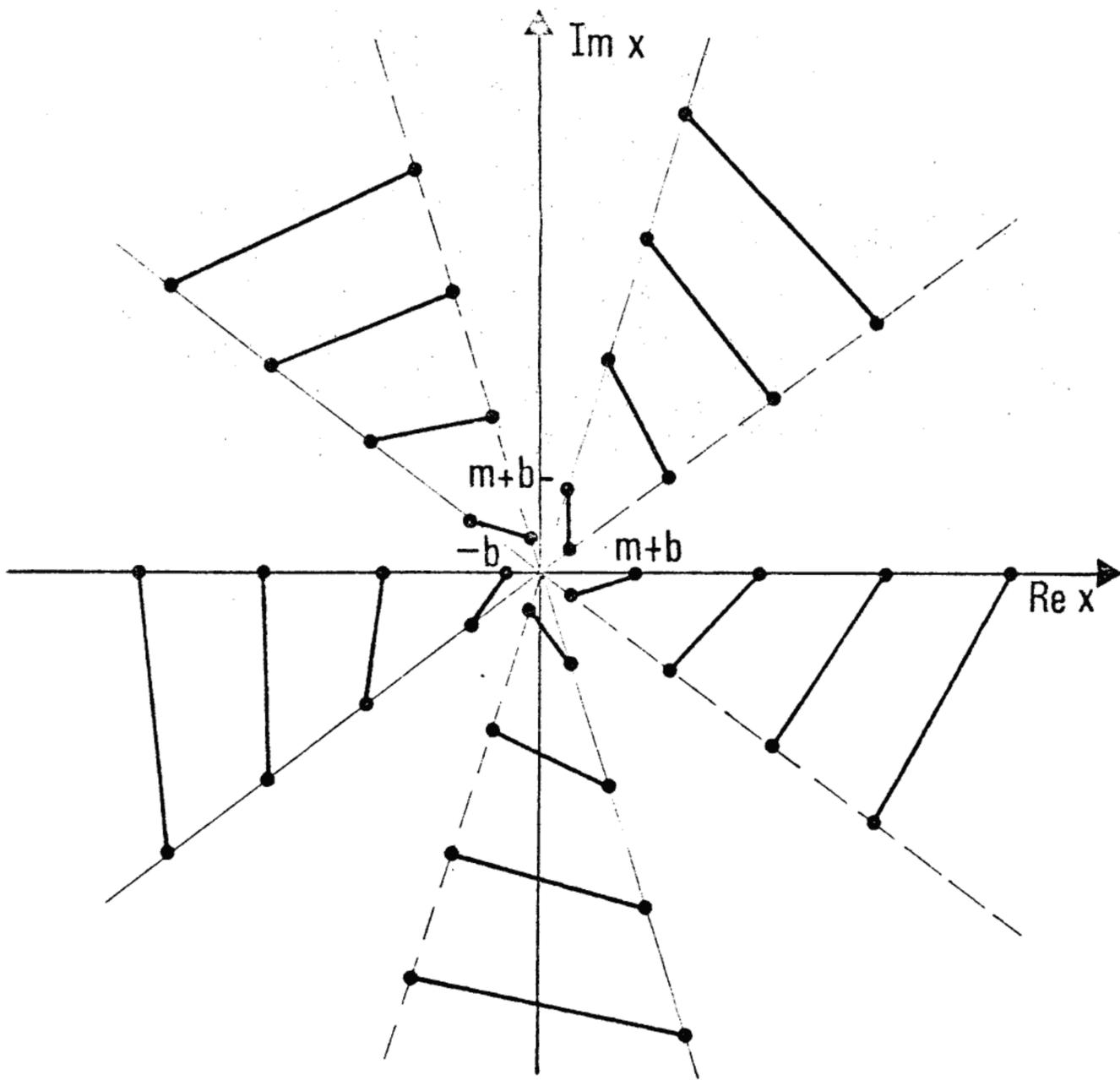


fig. 14

estende a tutti gli altri casi con $n > 6$.^{46),47)}

-
- 46) Un caso che può presentare un certo interesse è quello di $n=8$, che costituisce il primo esempio di FTG di ordine pari (per le quali si mantiene la periodicità sull'asse reale e su tutte le rette ottenute sfruttando la simmetria (29)) presumibilmente non trattabile in termini di funzioni ellittiche. Infatti, anche se è possibile tentare di ricollegare le FTG di ordine 8 a quelle di ordine 4 attraverso il procedimento con cui l'ordine 6 è stato ricollegato all'ordine 3, diversamente da tale caso l'integrale ottenuto non sembra esprimibile attraverso le FTG di ordine 4 e altre funzioni note. Tuttavia la collocazione delle singolarità di tale FTG (almeno di quelle più vicine all'origine) si può ottenere integrando numericamente la (27) con $p=4$, $q = 1/2$ e ϕ coincidente (per la (27')) con una singolarità di A_4 e T_4 .
- 47) Si noti che, per qualsiasi n intero, in un intorno sufficientemente piccolo dell'origine (se $n=5$ per $|x| < b$), le FTG possono essere calcolate con precisione grande quanto si vuole attraverso gli sviluppi in serie (11), sempre calcolabili a partire dal sistema (4) (direttamente o mediante tecniche basate su di esso).