DEFINIZIONE E STUDIO DI UNA NUOVA CLASSE DI FUNZIONI, CHE PERMETTONO UNA PRESENTAZIONE DIVERSA DELLE FUNZIONI ELLITTICHE.

E. FERRARI

Istituto di Fisica dell'Università, Roma.

INTRODUZIONE.

Si vogliono studiare le proprietà di una classe di funzioni di una variabile $A_n(x)$, $T_n(x)$, dipendenti da un parametro reale n, che in un certo senso generalizzano le proprietà delle funzioni trigonometriche $\sin x$, $\cos x$, e per questo verranno chiamate "funzioni trigonometriche generalizzate" (FTG), anche se, come si vedrà, gli esempi più interessanti saranno connessi alle funzioni ellittiche.

Le funzioni trigonometriche corrispondono al caso particolare $n = 2$, perchè questo valore figura come esponente nella relazione

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \tag{1}$$

Si vuole infatti che, per n generico, $A_n(x)$ e $T_n(x)$ soddisfino la relazione

$$[A_n(x)]^n + [T_n(x)]^n = 1 \tag{2}$$

E' chiaro che la sola condizione (2) è del tutto insufficiente per definire tali funzioni. Si deve ricorrere a un'altra fondamentale generalizzazione, concernente le relazioni differenziali

$$\frac{d}{dx}\sin x = \cos x \qquad \frac{d}{dx}\cos x = -\sin x \tag{3}$$

che, per n generico, diventano

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} A_n(x) &= [T_n(x)]^{n-1} \\ \frac{d}{dx} T_n(x) &= -[A_n(x)]^{n-1} \end{aligned} \tag{4}$$

In modo completamente analogo (cambiando un segno nella (2) e nella seconda delle (4) si può definire la classe delle funzioni iperboliche generalizzate (FIG) che, per $n=2$ si riducono a $\sinh x$, $\cosh x$.

Il lavoro che segue sarà articolato in tre parti. La prima studia le proprietà delle FTG come funzioni di variabile reale, riportando la definizione originale di queste funzioni[1], in base a cui possono essere dedotte le (4), e ricavando alcune importanti proprietà delle funzioni suddette sull'asse reale. In linea di principio, questa parte potrebbe sembrare superflua (in quanto contenuta nella seconda parte, ove le FTG sono studiate come funzioni di variabile complessa); tuttavia essa fornisce utili indicazioni per lo studio di tali funzioni nel campo complesso, come del resto verrà constatato negli esempi che saranno discussi in seguito.

Benché in linea di principio il parametro n (chiamato anche "ordine" delle FTG) possa essere arbitrario, è evidente che i casi di maggior interesse, sui quali verrà concentrata l'attenzione, sono quelli in cui n è intero e positivo. Si può anticipare qui che la soluzione quando $n=1$ e 2 è banale, mentre per $n = 3,4$ e 6 essa si può ottenere mediante particolari tipi di funzioni ellittiche. Invece gli altri casi con n intero ($n = 5,7,8,9 \ldots$) sembrano richiedere una difficile indagine nel campo delle funzioni a più valori di variabile complessa, che l'autore della presente nota non è in grado di svolgere: a proposito di questi casi, si potrà soltanto delineare l'impostazione del problema, con la presentazione delle difficoltà che si incontrano.

La terza parte del lavoro è forse la più interessante dal punto di vista matematico: in essa, visto la corrispondenza tra FTG con $n = 3,4,6$ e particolari funzioni ellittiche, si cerca di estendere la classe delle FTG,

---

1) Questa definizione, e le proprietà che ne derivano, sono state presentate dallo scrivente come tesina (relatori i Proff. A. Ghizzetti e E.De Giorgi), in occasione della seduta di laurea in Fisica tenutasi il 19-7-1957 presso l'Istituto di Fisica dell'Università di Roma.

con opportune modifiche alle formule (2) e (4), in modo da introdurre una dipendenza da un parametro addizionale e descrivere così l'intera classe delle funzioni ellittiche (con speciale attenzione verso quelle a invarianti reali). Questi sviluppi porteranno a risultati soddisfacenti, tali da poter parlare di un nuovo modo di presentare le funzioni ellittiche.

P A R T E I

LE FTG COME FUNZIONI DI VARIABILE REALE

I - Definizion delle FTG.

Per la definizione delle FTG come funzioni di una variabile reale x si generalizza una delle possibili definizioni delle funzioni $\sin x$, $\cos x$ nella seguente maniera:

Si dicono $A_n(x)$ e $T_n(x)$ rispettivamente l'ordinata e l'ascissa di un punto della curva $\xi^n + \eta^n = 1$ (giacente nel piano cartesiano $\xi\eta$), tale che il raggio vettore per quel punto, il semiasse positivo ξ e la curva in questione delimitino un settore di area $\frac{1}{2}x$.

Affinché la definizione data abbia senso, n deve essere positivo. In tal caso, la curva nel piano $\xi\eta$ (che sarà chiamata "curva parametrica") passa per i punti $(1,0)$ e $(0,1)$, ed è certamente definita nel primo quadrante. Le funzioni possono quindi essere sempre definite in un intervallo della variabile x compreso tra $x = 0$ (ove $A_n = 0$, $T_n = 1$ per ogni $n>0$) e un valore positivo di x, dipendente da n e chiamato m_n, uguale al doppio dell'area (finita) delimitata dalla curva parametrica nel primo quadrante. E' evidentemente $A_n(m_n) = 1$, $T_n(m_n) = 0$. Il valore di m_n è facilmente calcolabile: si ha

$$m_n = 2\int_0^1 (1-\xi^n)^{1/n}\, d\xi = \frac{1}{n}\, B\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}\,\frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)} \qquad (5)$$

Casi particolari: $m_1=1, m_2=\pi/2$, $m_3 = \frac{1}{2\pi\sqrt{3}}\,\Gamma^3\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{2\pi}{3}\right)^2 \Gamma^{-3}\left(\frac{2}{3}\right)$,