

iii)  $\implies$  iv) Siano  $a, b \in S$  poiché  $ab \mathcal{D} ba$ , per l'ipotesi  $\mathcal{D} = \mathcal{R}$  e per il Teorema 1.1

$$\begin{aligned} ba &= \widehat{ba} \quad ba = \widehat{ab} \widehat{ba} \quad ba = \\ &= ab (ab)^{-1} ba \in aS \end{aligned}$$

cioè  $Sa \subseteq aS$ ; Analogamente  $aS \subseteq Sa$ .

iv)  $\implies$  i) Siano  $e, fe \in E$ ,  $ef \mathcal{D} fe$  quindi esiste  $x \in S$  tale che  $efS = xS$ ,  $Sx = Sfe$ . Pertanto, per l'ipotesi  $efS = xS = Sx = Sfe = feS$   $Sef = efS = feS = Sfe$ .

Allora per il Teorema 1.1

$$ef = ef \cdot fe = fe.$$

### 3. STRUTTURA DELGI ORTOGRUPPI. -

Sia  $S$  un ortogruppo; risulterà dal Teorema 3.1 seguente, che  $S$  è un semireticolo  $Y$  di gruppi rettangolari  $S_\alpha (\alpha \in Y)$  e quindi il prodotto di un elemento  $x$  di  $S_\alpha$  e di un elemento  $y$  di  $S_\beta$  è in  $S_{\alpha\beta}$  ( $\alpha\beta$  prodotto di  $\alpha$  e  $\beta$  in  $Y$ ). Ma tale teorema non chiarisce il modo in cui elementi di differenti  $S_\alpha$  si possono moltiplicare tra loro.

Riprendendo un teorema di struttura per i semigruppri completamente regolari di Lallement [7/, 1967], M. Petrich ottiene [10/, 1974] un teorema di struttura "fine" per gli ortogruppi, chiarendo il modo in cui si moltiplicano gli elementi dei differenti  $S_\alpha$ , tramite sistemi di applicazioni soddisfacenti certe proprietà; tuttavia M. Petrich non dà un procedimento effettivo di costruzione di tali sistemi.

La dimostrazione del teorema di M. Petrich si avrà ora (ottenendo una semplificazione della trattazione) utilizzando un risultato di Clifford [2/, 1972] sugli ortogruppi a "due componenti".





i)  $\lambda_a, \rho_a$  sono associate

ii)  $\lambda_{aa'} = \lambda_a \lambda_{a'}$  ,  $\rho_{aa'} = \rho_a \rho_{a'}$

Dim. -

Si prova la i). Per ogni  $x, y$  in  $T$

$$x(\lambda_a y) = x(ay) = xay = (x\rho_a)y$$

Si prova la ii). Per ogni  $x$  e  $S$

$$\lambda_{aa'}x = aa'x = a(a'x) = \lambda_a(\lambda_{a'}x)$$

$$x\rho_{aa'} = xaa' = (xa)a' = (x\rho_a)\rho_{a'}$$

Sia  $X$  un insieme, il semigrúppo di tutte le trasformazioni di  $X$  riguardate come destre [risp. sinistre] si denota con  $\tilde{\mathcal{T}}(X)$  [risp.  $\mathcal{T}(X)$ ].

Indichiamo inoltre con  $\pi$  il semireticolò costituito da due soli elementi  $\alpha, \beta$  tali che  $\alpha > \beta$  cioè  $\alpha\beta = \beta\alpha = \beta$  ed  $\alpha \neq \beta$ .

DEFINIZIONE 3.3. - Un semigrúppo  $S$  è un ortogrúppo a due componenti sse è un semireticolò  $\pi$  di gruppi rettangolari.

La struttura di un ortogrúppo a due componenti è descritta dal seguente lemma.

LEMMA 3.3. -

Siano  $S_\alpha = G_\alpha \times I_\alpha \times \Lambda_\alpha$  ed  $S_\beta = G_\beta \times I_\beta \times \Lambda_\beta$  gruppi rettangolari disgiunti. Si consideri

(A.1) un omomorfismo  $t_{\alpha,\beta}$  da  $S_\alpha$  in  $\tilde{\mathcal{T}}(I_\beta)$

(A.2) un omomorfismo  $\tau_{\alpha,\beta}$  da  $S_\alpha$  in  $\mathcal{T}(\Lambda_\beta)$

(A.3) un omomorfismo  $Z_{\alpha,\beta}$  da  $G_\alpha$  in  $G_\beta$

Se  $A = (a; j, \mu) \in S_\alpha$  ed  $B = (b; i, \lambda) \in S_\beta$ , si definiscono i prodotti

$$(1) \quad AB = (aZ_{\alpha,\beta})b; (t_{\alpha,\beta}^A)i,\lambda)$$

$$(2) \quad BA = (b(aZ_{\alpha,\beta}); i,\mu(A\tau_{\alpha,\beta})).$$

Con il prodotto definito e mantenendo i prodotti in  $S_\alpha$  e  $S_\beta$ ,  $S_\beta \cup S_\alpha$  è un ortogruppo a due componenti.

Viceversa, ogni ortogruppo a due componenti è isomorfo ad una tale costruzione.

Dim.-

Siano  $S_\alpha = G_\alpha \times I_\alpha \times \Lambda_\alpha$  e  $S_\beta = G_\beta \times I_\beta \times \Lambda_\beta$  due gruppi rettangolari disgiunti, e siano  $t_{\alpha,\beta}$ ,  $\tau_{\alpha,\beta}$  e  $Z_{\alpha,\beta}$  le applicazioni delle ipotesi del teorema. Il prodotto definito su  $S = S_\alpha \cup S_\beta$ , come nel teorema, è associativo.

L'associatività si ottiene dalla verifica delle uguaglianze

$$(AB)C = A(BC) \quad , \quad A(CB) = (AC)B \quad , \quad (BA)C = B(AC)$$

per ogni  $A, C \in S_\alpha$  e  $B \in S_\beta$  e, per ogni  $A \in S_\alpha$  e  $C, B \in S_\beta$ .

Verifichiamo, ora che  $(AC)B = A(CB)$  con  $A, C \in S_\alpha$  ed  $B \in S_\beta$ .

Sia  $A = (a; i, \delta)$ ,  $C = (c; j, \epsilon)$ ,  $B = (b; i, \mu)$ :

$$(AC)B = ((ac)Z_{\alpha,\beta})b; (t_{\alpha,\beta}^{(AC)})i,\mu) \quad (\text{per la (1)});$$

$$A(CB) = A((c)Z_{\alpha,\beta})b; (t_{\alpha,\beta}^C)i,\mu) \quad (\text{per la (1)}) =$$

$$= ((a)Z_{\alpha,\beta})(c)Z_{\alpha,\beta})b; t_{\alpha,\beta}^A((t_{\alpha,\beta}^C)i,\mu) \quad (\text{per la (1)}) =$$

$$= ((ac)Z_{\alpha,\beta})b; (t_{\alpha,\beta}^{AC})i,\mu)$$

poiché  $Z_{\alpha,\beta}$  e  $t_{\alpha,\beta}$  sono omomorfismi.

Le altre uguaglianze si dimostrano in modo analogo.

Per come è definito il prodotto in  $S$  è evidente che  $S_\alpha$  e  $S_\beta$

sono sottosemigrupperi di  $S$ , inoltre  $S = S_\alpha \cup S_\beta$ , pertanto  $S$  è completamente regolare. Per provare che  $S$  è un ortogruppo, poiché  $S_\alpha$  e  $S_\beta$  sono gruppi rettangolari e quindi ortogruppi, è sufficiente provare che i prodotti  $AB$  e  $BA$  sono idempotenti, se  $A$  è un idempotente di  $S_\alpha$  e  $B$  è un idempotente di  $S_\beta$ .

Sia  $A$  un idempotente di  $S_\alpha$ , sia  $B$  un idempotente di  $S_\beta$ :

$$A = (e_\alpha; i, \lambda) \quad \text{con} \quad e_\alpha \text{ unità di } G_\alpha$$

$$B = (e_\beta; j, \mu) \quad \text{con} \quad e_\beta \text{ unità di } G_\beta$$

$$AB = ( (e_\alpha Z_{\alpha, \beta}) e_\beta ; (t_{\alpha, \beta}^A) j, \mu ) = (e_\beta; (t_{\alpha, \beta}^A) j, \mu)$$

$$BA = (e_\beta (e_\alpha Z_{\alpha, \beta}); j, \lambda(B\tau_{\alpha, \beta})) = e_\beta; j, \lambda(B\tau_{\alpha, \beta}).$$

Pertanto, poiché  $AB$  e  $BA$  sono idempotenti,  $S$  è un ortogruppo.

Viceversa, sia  $S = S_\alpha \cup S_\beta$  ( $\alpha > \beta$ ) un ortogruppo a due componenti; si indica ancora con  $S$  il semigruppero isomorfo al precedente con  $S_\alpha$  della forma  $G_\alpha \times I_\alpha \times \Lambda_\alpha$  e  $S_\beta$  della forma  $G_\beta \times I_\beta \times \Lambda_\beta$ .

Si procede ora alla costruzione delle applicazioni  $t_{\alpha, \beta}, \tau_{\alpha, \beta}, Z_{\alpha, \beta}$ .

Sia  $A \in S_\alpha$ , si consideri le  $S_\beta$ -traslazioni interne sinistra e destra di  $A$ ,  $\lambda_A$  e  $\rho_A$ , rispettivamente. Si osservi che

$$\begin{aligned} \lambda_A(b; i, \mu) &= \lambda_A((b; i, \mu) (1; i, \mu)) = \\ &= (\lambda_A(b; i, \mu)) (1; i, \mu) = (c; k, \mu) \end{aligned}$$

(con  $c \in G_\beta$ ,  $k \in I_\beta$ , opportuni), con  $b \in G_\beta$ ,  $i \in I_\beta$  e  $\mu \in \Lambda_\beta$  ed  $1$  l'unità di  $G_\beta$ . In altre parole  $\lambda_A$  non cambia l'indice appartenente a  $I_\beta$ .

Si suppone che

$$\lambda_A(1; i, \mu) = (b; j, \mu) \quad \text{e} \quad \lambda_A(1; i, \vartheta) = (c; k, \vartheta)$$

ove l'unità di  $G_\beta$ ,  $i, j, k \in I_\beta$ ,  $\mu, \vartheta \in \Lambda_\beta$ ; allora

$$\begin{aligned} (b; j, \vartheta) &= (b; j, \mu)(1; j, \vartheta) = (\lambda_A(1; i, \mu))(1; j, \vartheta) = \\ &= \lambda_A((1; i, \mu)(1; j, \vartheta)) = \lambda_A(1; i, \vartheta) = (c; k, \vartheta) \end{aligned}$$

e quindi  $j = k$  e  $b = c$  cioè i valori dei due primi indici di  $\lambda_A(1; i, \mu)$  dipendono solo da  $i$ . Si indichi con  $\theta_A$  e  $t_{\alpha, \beta}^A$  le applicazioni da  $I_\beta$  in  $G_\beta$  e da  $I_\beta$  in  $I_\beta$ , rispettivamente, tali che

$$\lambda_A(1; i, \mu) = (\theta_A i; (t_{\alpha, \beta}^A) i, \mu) \quad (3)$$

Analogamente esistono  $\psi_A$  e  $A\tau_{\alpha, \beta}$  applicazioni da  $\Lambda_\beta$  in  $G_\beta$  e da  $\Lambda_\beta$  in  $\Lambda_\beta$ , rispettivamente, tale che

$$(1; i, \mu)\rho_A = (\mu\psi_A; i, \mu(A\tau_{\alpha, \beta})) \quad (4)$$

Poiché si ha

$$\begin{aligned} (b; j, \mu)(\lambda_A(1; i, \vartheta)) &= (b; j, \mu)(\theta_A i; (t_{\alpha, \beta}^A) i, \vartheta) = \\ &= (b(\theta_A i); j, \vartheta) \quad (5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ((b; j, \vartheta)\rho_A)(1; i, \vartheta) &= (b; j, \mu)((1; j, \mu)\rho_A)(1; i, \vartheta) = \\ &= (b; j, \mu)(\mu\psi_A; i, \mu(A\tau_{\alpha, \beta}))(1; i, \vartheta) = \\ &= (b(\mu\psi_A); j, \vartheta) \quad (6) \end{aligned}$$

per ogni  $b \in G_\beta$ ,  $i, j \in I_\beta$  ed  $\mu, \vartheta \in \Lambda_\beta$ , e poiché  $\lambda_A$  e  $\rho_A$  sono associate [cfr. Lemma 3.2], segue da (5) e (6) che

$$b(\mu\psi_A) = b(\theta_A i)$$

per ogni  $b \in G_\beta$ ,  $i \in I_\beta$  e  $\mu \in \Lambda_\beta$ , pertanto

$$\mu\psi_A = \theta_A i$$

per ogni  $\mu \in \Lambda_\beta$ ,  $i \in I_\beta$ .

Si indichi con  $A\xi_{\alpha,\beta}$  l'elemento di  $G_\beta$  uguale a  $\theta_A i$ , per ogni  $i \in I_\beta$ .

Si è provata allora l'esistenza di tre applicazioni:

$$\xi_{\alpha,\beta} : A \in S_\alpha \rightarrow A \xi_{\alpha,\beta} \in G_\beta$$

$$t_{\alpha,\beta} : A \in S_\alpha \rightarrow t_{\alpha,\beta}^A \in \tilde{\mathcal{T}}(I_\beta)$$

$$\tau_{\alpha,\beta} : A \in S_\alpha \rightarrow A\tau_{\alpha,\beta} \in \mathcal{T}(\Lambda_\beta)$$

Si verifica facilmente che esse sono omomorfismi, ricordando che  $\lambda_{AA'} = \lambda_A \lambda_{A'}$

ed  $\rho_{AA'} = \rho_A \rho_{A'}$  per ogni  $A, A' \in S_\alpha$  [Lemma 3.2]. Si indichi con  $Z_{\alpha,\beta}$ , l'applicazione da  $G_\alpha$  in  $G_\beta$  tale che

$$(7) \quad a Z_{\alpha,\beta} = (a; i, \lambda) \xi_{\alpha,\beta}$$

per ogni  $a \in G_\alpha$ ,  $i \in I_\alpha$  e  $\lambda \in \Lambda_\alpha$ .

Tale applicazione è ben posta; infatti, per ogni  $i, j \in I_\alpha$ ,  $\lambda, \mu \in \Lambda_\alpha$  ed  $a \in G_\alpha$ ,

$$\begin{aligned} (a; i, \lambda) \xi_{\alpha,\beta} &= ((1; i, \lambda)(a; j, \mu)(1; i, \lambda)) \xi_{\alpha,\beta} \\ &= (a; j, \mu) \xi_{\alpha,\beta} \end{aligned}$$

poiché  $\xi_{\alpha,\beta}$  è un omomorfismo.

Facilmente segue che  $Z_{\alpha,\beta}$  è un omomorfismo dal fatto che  $\xi_{\alpha,\beta}$  è un omomorfismo.

Siano ora  $A = (a; j, \lambda) \in S_\alpha$  ed  $B = (b; i, \mu) \in S_\beta$ ; allora

$$\begin{aligned} AB &= \lambda_A(B) = \lambda_A((1; j, \mu)B) = (\lambda_A(1; j, \mu))B = \\ &= ((A \xi_{\alpha,\beta})b; (t_{\alpha,\beta}^A)j, \mu) \quad (\text{per la (3)}) \\ &= ((aZ_{\alpha,\beta})b; (t_{\alpha,\beta}^A)j, \mu) \quad (\text{per la (7)}) \end{aligned}$$



Si ottiene in modo analogo l'espressione di BA e quindi si ha la tesi.

Si adotta la notazione  $\langle \chi \rangle$  per denotare il valore costante di una applicazione costante  $\tilde{\chi}$ .

TEOREMA 5.5. -

(B.0) Sia  $Y$  un semireticolato; ad ogni  $\alpha$  in  $Y$  corrisponda un gruppo rettangolare  $S_\alpha = I_\alpha \times \Lambda_\alpha$ . Si assumi che

$$S_\alpha \cap S_\beta = \emptyset \text{ se } \alpha \neq \beta.$$

Per ogni coppia  $(\alpha, \beta) \in Y \times Y$  tale che  $\alpha \geq \beta$  si abbiano tre omomorfismi

$$Z_{\alpha, \beta} : G_\alpha \rightarrow G_\beta \quad t_{\alpha, \beta} : S_\alpha \rightarrow \tilde{\mathcal{T}}(I_\beta) \quad \tau_{\alpha, \beta} : S_\alpha \rightarrow \mathcal{T}(\Lambda_\beta)$$

soddisfacenti le seguenti condizioni:

(B.1) Se  $\alpha \in Y$  ed  $A = (a; i, \lambda) \in S_\alpha$ , allora

$$aZ_{\alpha, \alpha} = a \quad \langle t_{\alpha, \alpha}, A \rangle = 1 \quad \langle A, \tau_{\alpha, \alpha} \rangle = \lambda$$

(B.2) Per  $\alpha, \beta$  arbitrari elementi di  $Y$ , e  $A \in S_\alpha$ ,  $B \in S_\beta$ ,

$$\left( t_{\alpha, \alpha\beta}, A \right) \left( t_{\beta, \alpha\beta}, B \right) \quad \text{ed} \quad \left( A, \tau_{\alpha, \alpha\beta} \right) \left( B, \tau_{\beta, \alpha\beta} \right)$$

sono trasformazioni costanti di  $I_{\alpha\beta}$  ed  $\Lambda_{\alpha\beta}$ , rispettivamente.

Su  $S = \bigcup_{\alpha \in Y} S_\alpha$  si definisce il prodotto di  $A = (a; i, \lambda) \in S_\alpha$  e  $B = (b; j, \mu) \in S_\beta$  come

$$(8) \quad AB = \left( aZ_{\alpha, \alpha\beta} bZ_{\beta, \alpha\beta}; \langle t_{\alpha, \alpha\beta}, A \rangle \langle t_{\beta, \alpha\beta}, B \rangle, \langle A, \tau_{\alpha, \alpha\beta} \rangle \langle B, \tau_{\beta, \alpha\beta} \rangle \right)$$

(B.3) Per ogni  $\alpha, \beta, \gamma \in Y$  ed  $A \in S_\alpha$ ,  $B \in S_\beta$

$$\text{se } \alpha > \beta > \gamma \quad \text{allora } Z_{\alpha,\beta} Z_{\beta,\gamma} = Z_{\alpha,\gamma} \quad (9)$$

$$\text{se } \alpha\beta > \gamma \quad \text{allora } t_{\alpha\beta,\gamma}^{(AB)} = t_{\alpha,\gamma}^A t_{\beta,\gamma}^B \quad (10.1)$$

$$(AB)\tau_{\alpha\beta,\gamma} = A\tau_{\alpha,\gamma} B\tau_{\beta,\gamma} \quad (10.2)$$

Se queste condizioni sono soddisfatte, allora, con il prodotto definito da (8);  $S$  è un ortogruppo. Viceversa, ogni ortogruppo è isomorfo ad uno ottenuto con una costruzione di questo tipo.

Dim. -

Per ogni  $\alpha \in Y$ , sia  $S_\alpha = G_\alpha \times I_\alpha \times \Lambda_\alpha$  un gruppo rettangolare con  $Y$  un semireticolato, tale che  $S_\alpha \cap S_\beta = \emptyset$  se  $\alpha \neq \beta$  (in  $Y$ ). Siano  $Z_{\alpha,\beta}$ ,  $t_{\alpha,\beta}$ ,  $\tau_{\alpha,\beta}$  con  $\alpha \geq \beta$  ( $\alpha, \beta \in Y$ ) gli omomorfismi dati nel teorema e inoltre su  $\bigcup_{\alpha \in Y} S_\alpha$  sia definito il prodotto (8) che coincide con quello dato su ogni singolo  $S_\alpha$  ( $\alpha \in Y$ ) in virtù della condizione (B.1).

Proviamo che il prodotto (8) è associativo. Siano  $A, B, C \in S$  con  $A = (a; i_\alpha, \mu_\alpha) \in S_\alpha$ ,  $B = (b; i_\beta, \mu_\beta) \in S_\beta$  ed  $C = (c; i_\gamma, \mu_\gamma) \in S_\gamma$  ( $\alpha, \beta, \gamma \in Y$ ),

$$(AB)C = ( (aZ_{\alpha,\beta} bZ_{\beta,\alpha\beta}) Z_{\alpha\beta,\alpha\beta\gamma} cZ_{\gamma,\alpha\beta\gamma} ; \langle t_{\alpha\beta,\alpha\beta\gamma}^{AB} t_{\gamma,\alpha\beta\gamma}^C \rangle ,$$

$$\langle AB\tau_{\alpha\beta,\alpha\beta\gamma} C\tau_{\gamma,\alpha\beta\gamma} \rangle \text{ (per 1a (8))} =$$

$$= (aZ_{\alpha,\alpha\beta\gamma} bZ_{\beta,\alpha\beta\gamma} cZ_{\gamma,\alpha\beta\gamma} ; \langle t_{\alpha,\alpha\beta\gamma}^A t_{\beta,\alpha\beta\gamma}^B t_{\gamma,\alpha\beta\gamma}^C \rangle ,$$

$$= \langle A\tau_{\alpha,\alpha\beta\gamma} B\tau_{\beta,\alpha\beta\gamma} C\tau_{\gamma,\alpha\beta\gamma} \rangle \text{ (per (B.3))} =$$

$$A(BC) = (aZ_{\alpha,\alpha\beta\gamma} (bZ_{\beta,\beta\gamma} cZ_{\gamma,\beta\gamma}) Z_{\beta\gamma,\alpha\beta\gamma} ; \langle t_{\alpha,\alpha\beta\gamma}^A t_{\beta\gamma,\alpha\beta\gamma}^{BC} \rangle ,$$

$$\langle A\tau_{\alpha,\alpha\beta\gamma} BC\tau_{\beta\gamma,\alpha\beta\gamma} \rangle =$$

$$= (aZ_{\alpha, \alpha\beta\gamma} \quad bZ_{\beta, \alpha\beta\gamma}, \quad cZ_{\gamma, \alpha\beta\gamma}, \quad ; < t_{\alpha, \alpha\beta\gamma}^A \quad t_{\beta, \alpha\beta\gamma}^B \quad t_{\gamma, \alpha\beta\gamma}^C >, \\ < A\tau_{\alpha, \alpha\beta\gamma} \quad B\tau_{\beta, \alpha\beta\gamma} \quad C\tau_{\gamma, \alpha\beta\gamma} > ).$$

E' evidente quindi, per il Corollario 5.2, che  $S$  è un ortogruppo.

Viceversa, sia  $S$  un ortogruppo e sia  $S = \bigcup_{\alpha \in Y} S_{\alpha}$  la sua espressione come semireticolato di gruppi rettangolari e si indichi ancora con  $S$  il semigruppato isomorfo al precedente con gli  $S_{\alpha}$  della forma  $G_{\alpha} \times I_{\alpha} \times \Lambda_{\alpha}$  ( $\alpha \in Y$ ).

Siano  $\alpha, \beta \in Y$  tali che  $\alpha > \beta$  e si consideri gli omomorfismi  $Z_{\alpha, \beta}$ ,  $t_{\alpha, \beta}$ ,  $\tau_{\alpha, \beta}$  relativi ad  $S_{\alpha} \cup S_{\beta}$  del Lemma 5.4, definendo  $Z_{\alpha, \alpha}$ ,  $t_{\alpha, \alpha}$ ,  $\tau_{\alpha, \alpha}$  ( $\alpha \in Y$ ) come in (B.1). Allora considerati  $\alpha, \beta$  arbitrari elementi di  $Y$  ed  $A \in S_{\alpha}$ ,  $B \in S_{\beta}$  si vuole provare che  $t_{\alpha, \alpha\beta}^A \quad t_{\beta, \alpha\beta}^B$  è una applicazione costante. Sia  $\bar{\lambda} \in \Lambda_{\alpha\beta}$ ; per ogni  $i \in I_{\alpha\beta}$  si ponga

$$\underline{i} = (1_{\alpha\beta}; i, \bar{\lambda})$$

dove  $1_{\alpha\beta}$  è l'unità di  $G_{\alpha\beta}$ , allora

$$B\underline{i} = (bZ_{\beta, \alpha\beta}; (t_{\beta, \alpha\beta}^B)i, \bar{\lambda})$$

per il Lemma 5.4 (si tenga conto che  $\beta > \alpha\beta$ ) e quindi

$$(11) \quad A(B\underline{i}) = (aZ_{\alpha, \alpha\beta} \quad bZ_{\beta, \alpha\beta}; (t_{\alpha, \alpha\beta}^A \quad t_{\beta, \alpha\beta}^B)i, \bar{\lambda})$$

per il lemma 5.4 (si tenga conto che  $\alpha \geq \alpha\beta$ ).

Posto  $AB = (c; j, \mu)$

$$A(B\underline{i}) = (AB)\underline{i} = (c; j, \bar{\lambda}) \quad (12)$$

Confrontando (11) e (12) segue che  $t_{\alpha, \alpha\beta}^A \quad t_{\beta, \alpha\beta}^B$  è costante e

$$< t_{\alpha, \alpha\beta}^A \quad t_{\beta, \alpha\beta}^B > = j \quad \text{ed} \quad c = aZ_{\alpha, \alpha\beta} \quad bZ_{\beta, \alpha\beta}; \quad \text{così pure} \quad A\tau_{\alpha, \alpha\beta} \quad B\tau_{\beta, \alpha\beta} \quad \text{è costante}$$

$$\text{ed} \quad < A\tau_{\alpha, \alpha\beta} \quad B\tau_{\beta, \alpha\beta} > = \mu.$$

A questo punto è immediata l'uguaglianza (8) del teorema.

Si verificano ora le (10.1) e (10.2). Siano  $A, B, C$  e  $S$

$$A = (a; i_{\alpha}, \mu_{\alpha}) \in S_{\alpha}, \quad B = (b; i_{\beta}, \mu_{\beta}) \in S_{\beta}, \quad C = (c; i_{\gamma}, \mu_{\gamma}) \in S_{\gamma},$$

con  $\alpha\beta > \gamma$

$$(AB)C = ((aZ_{\alpha, \alpha\beta} \quad bZ_{\beta, \alpha\beta})Z_{\alpha\beta, \gamma} \quad c; (t_{\alpha\beta, \gamma}^{AB}) i_{\gamma}, \mu_{\gamma})$$

per la (8) che si è ottenuta ed il Lemma 5.4, inoltre  $A(BC) = A(bZ_{\beta, \gamma} \quad c;$

$$(t_{\beta, \gamma}^B) i_{\gamma}, \mu_{\gamma}) \text{ (per il Lemma 5.4 ; } \beta \geq \alpha\beta > \gamma) =$$

$$= (aZ_{\alpha, \gamma} \quad bZ_{\beta, \gamma} \quad c; (t_{\alpha, \gamma}^A)(t_{\beta, \gamma}^B) i_{\gamma}, \mu_{\gamma})$$

(per Lemma 5.4;  $\alpha \geq \alpha\beta > \gamma$ ) ne segue, dalla associatività di  $S$ , la (10.1).

Da  $C(AB) = (CA)B$  segue analogamente la (10.2), mentre dall'uguaglianza

$$(AB)C = A(BC) \text{ con } A \in S_{\alpha}, \quad B \in S_{\beta} \quad \text{e} \quad C \in S_{\gamma} \text{ tali che } \alpha > \beta > \gamma \text{ si}$$

ottiene la (9) (applicando più volte il prodotto nella forma del Lemma 5.4).

COROLLARIO 5.6. (Petrich, /8/). -

Sia  $Y$  un semireticolato; ad ogni  $\alpha \in Y$  corrisponda una banda rettango-

lare  $E_{\alpha} = I_{\alpha} \times \Lambda_{\alpha}$  tale che  $E_{\alpha} \cap E_{\beta} = \emptyset$  se  $\alpha \neq \beta$ . Per ogni coppia

$(\alpha, \beta) \in Y \times Y$  tale che  $\alpha \geq \beta$  si abbiano due omomorfismi

$$t_{\alpha, \beta}: E_{\alpha} \rightarrow \tilde{\mathcal{F}}(I_{\beta}) \quad \tau_{\alpha, \beta}: E_{\alpha} \rightarrow \mathcal{F}(\Lambda_{\beta})$$

soddisfacenti le seguenti condizioni:

(C.1) Se  $\alpha \in Y$  ed  $A = (i; \lambda) \in E_{\alpha}$ , allora

$$\langle t_{\alpha, \alpha}^A \rangle = i, \quad \langle A\tau_{\alpha, \alpha} \rangle = \lambda$$

(C.2) Se  $\alpha, \beta$  sono arbitrari elementi di  $Y$ , e  $A \in E_{\alpha}$ ,

$B \in E_\beta$ , allora

$$(t_{\alpha, \alpha\beta}^A)(t_{\beta, \alpha\beta}^B) \text{ ed } (A\tau_{\alpha, \alpha\beta})(B\tau_{\beta, \alpha\beta})$$

sono trasformazioni costanti di  $I_{\alpha\beta}$  e  $\Lambda_{\alpha\beta}$ , rispettivamente.

Su  $E = \bigcup_{\alpha \in Y} E_\alpha$  si definisce il prodotto di  $A = (i, \lambda) \in E_\alpha$  e  $B = (j, \mu) \in E_\beta$ ,

come

$$(13) \quad AB = (\langle t_{\alpha, \alpha\beta}^A t_{\beta, \alpha\beta}^B \rangle, \langle A\tau_{\alpha, \alpha\beta} B\tau_{\beta, \alpha\beta} \rangle)$$

(C.3) Per ogni  $\alpha, \beta, \gamma \in Y$  e  $A \in E_\alpha$ ,  $B \in E_\beta$ , se  $\alpha\beta > \gamma$ , allora

$$t_{\alpha\beta, \gamma}^{AB} = t_{\alpha, \gamma}^A t_{\beta, \gamma}^B \quad (14.1)$$

$$AB\tau_{\alpha\beta, \gamma} = A\tau_{\alpha, \gamma} B\tau_{\beta, \gamma} \quad (14.2)$$

Se queste condizioni sono soddisfatte, allora, con il prodotto definito da (13),  $E$  è una banda. Viceversa, ogni banda è isomorfa ad una ottenuta con una costruzione di questo tipo.

COROLLARIO 5.7. - (Clifford, /4/)

Sia  $Y$  un semireticolato; ad ogni  $\alpha \in Y$  è associato un gruppo  $G_\alpha$  tale che  $G_\alpha \cap G_\beta = \emptyset$  se  $\alpha \neq \beta$ . Ad ogni coppia  $(\alpha, \beta) \in Y \times Y$  tale che

$\alpha \geq \beta$ , assegniamo un omomorfismo  $Z_{\alpha, \beta}$  da  $G_\alpha$  in  $G_\beta$  tale che

(D.1)  $Z_{\alpha\alpha}$  sia l'omomorfismo identico di  $G_\alpha$ .

(D.2) Per ogni  $\alpha, \beta, \gamma \in Y$  tali che  $\alpha > \beta > \gamma$

$$Z_{\alpha, \beta} Z_{\beta, \gamma} = Z_{\alpha, \gamma}$$

Sia  $S$  l'unione di tutti i gruppi  $G_\alpha$  ( $\alpha \in Y$ ), e definiamo il prodotto di due elementi  $a_\beta, b_\beta \in S$  ( $a_\alpha \in G_\alpha, b_\beta \in G_\beta$ ) come

$$a_\alpha b_\beta = (a_\alpha Z_{\alpha, \gamma})(b_\beta Z_{\beta, \gamma})$$

dove  $\gamma$  è il prodotto  $\alpha\beta$  nel semireticolato  $Y$ .

Allora  $S$  è un semigruppone unione di gruppi e in cui gli idempotenti commutano (o equivalentemente, un semigruppone inverso che è unione di gruppi). Viceversa, ogni tale semigruppone è isomorfo ad uno ottenuto con una tale costruzione.

*Accettato per la pubblicazione su parere favorevole  
del Prof. Franco MIGLIORINI*