$1_E \subseteq \mathscr{D} \cap (E \times E)$, inoltre, poiché $\mathscr{D} \subseteq \mathscr{J}$, $\mathscr{D} \cap (E \times E) \subseteq \mathscr{J} \cap (E \times E)$ quindi dalla ipotesi segue che $\mathscr{D} \cap (E \times E) = 1_E$.

iii) $\Longrightarrow$ i) Sia a un elemento di S; poiché S è regolare esiste un elemento z di S tale che $a = aza$. Allora, poiché $az \mathscr{D} za$ ed az e za sono elementi idempotenti di S, per l'ipotesi $az = za$.

Siano x ed y due elementi di S inversi di un elemento a di S; poiché $ax \mathscr{D} ya$, $xa \mathscr{D} ay$, $ax \mathscr{D} xa$, per l'ipotesi $ax = ya$, $xa = ay$, $ax = xa$, pertanto

$$x = xax = axx = yax = yxa = yay = y.$$

Per l'arbitrarietà dell'elemento a si conclude che S è inverso e completamente regolare.

2. UNA CLASSIFICAZIONE DEGLI ORTOGRUPPI. -

In questo capitolo si caratterizzano tramite le relazioni di Green gli ortogruppi con banda degli idempotenti di tipo P, ove P è uno qualsiasi dei tipi di banda classificati da M. Petrich in /8/.

Risulta utile l'introduzione del concetto di congruenza Λ-destra [Λ-sinistra], come pure l'introduzione della banda S/ρ dove S è un ortogruppo e ρ è una congruenza Λ-destra [Λ-sinistra].

Di tutti i teoremi si sono omessi i "duali" che si ottengono scambiando $\mathscr{R}$ con $\mathscr{L}$, il termine "destra" con "sinistra" e in modo opportuno le uguaglianze presenti nella (iv) di ogni teorema.

Tutti i risultati di questo capitolo sono dovuti all'autore /12/.

Ricordiamo che se a è un elemento completamente regolare (c.r.) di un semigruppo S, si indica con $\hat{a}$ l'unità di H_a e con a^{-1} l'inverso di A in H_a.

<u>DEFINIZIONE 2.1</u> - Sia S un semigruppo c.r. e ρ una relazione di equivalenza su S; ρ è una <u>Λ-relazione</u> se

$$a\,\rho\,\hat{a} \qquad \forall a \in S$$

Le relazioni di Green su un semigruppo c.r. sono esempi di Λ-relazioni.

<u>DEFINIZIONE 2.2</u> - Sia S un semigruppo c.r. e ρ una Λ-relazione su S; ρ è una congruenza Λ-destra [Λ-sin.] se è una congruenza sinistra [destra] ed

$$a\,\rho\,b \Longrightarrow \hat{a}c\,\rho\,\hat{b}c \qquad \forall c \in S \qquad (a,b \in S)$$

$$[a\,\rho\,b \Longrightarrow c\hat{a}\rho c\hat{b} \qquad \forall c \in S \qquad (a,b \in S)]$$

Si osservi che una Λ-relazione ρ è una congruenza se e solo se ρ è una congruenza Λ-destra e Λ-sinistra.

Sia S un semigruppo c.r. e ρ una congruenza Λ-destra; si indica con $\underline{a}$ la ρ-classe di a $(a \in S)$ e con S/ρ l'insieme delle classi di equivalenza su cui è definito il seguente prodotto

$$\underline{a}\,\underline{b} = \underline{\hat{a}b}$$

per ogni coppia $(\underline{a},\underline{b})$ di ρ-classi di S.

Si osservi che se una Λ-relazione ρ è una congruenza, allora S/ρ è il semigruppo quoziente.

<u>TEOREMA 2.1.-</u>

Se S è un ortogruppo e ρ è una congruenza Λ-destra, allora S/ρ è una banda.

<u>Dim.-</u>

Per ogni $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \in S/\rho$

$$(\underline{a},\underline{b})\,\underline{c} = (\underline{a}\,\underline{\hat{b}})\,\underline{c} = \underline{\hat{a}\hat{b}}\,\underline{c} = \underline{(\hat{a}\hat{b})c} = \underline{\hat{a}(\hat{b}c)} =$$
$$= \underline{a}\,\hat{b}c = \underline{a}\,(\underline{b}\,\underline{c})$$

i.e. il prodotto è associativo.

Inoltre, $\underline{a}\,\underline{a} = \underline{\hat{a}\,a} = \underline{a}$ per ogni $\underline{a} \in S/\rho$, quindi S/ρ è una

Sia S un semigruppo c.r.. Se $\{\rho_i\}_{i \in I}$ è una famiglia di congruenze -destre di S contenenti una relazione $\mathcal{K}$, allora

$$\rho = \bigcap_{i \in I} \rho_i$$

è una congruenza Λ-destra e contiene $\mathcal{K}$. Si indichi con $\mathcal{K}'$ l'intersezione di tutte le congruenze Λ-destre di S, tali che $\mathcal{K} \subseteq \sigma$

Si ricordi che una banda E è detta regolare sinistra [destra] sse $ax=axa$ [risp. $xa = axa$], per ogni $a,x \in E$.

TEOREMA 2.2.

In ogni ortogruppo S, $\mathcal{R}'$ è la più piccola delle congruenze Λ-destre ρ tali che S/ρ è una banda regolare sinistra.

Dim. -

Dal Teorema 2.1, $S/\mathcal{R}'$ è una banda; inoltre, per ogni $a,x \in S$, $\hat{a}\hat{x}S = \hat{a}\hat{x}\hat{a}S$, quindi $\hat{a}\hat{x}\,\mathcal{R}'\,\hat{a}\hat{x}\hat{a}$, pertanto $S/\mathcal{R}'$ è una banda regolare sinistra.

Sia ρ una congruenza Λ-destra ρ tale che S/ρ è una banda regolare sinistra ed a,b due elementi di S tali che $a\,\mathcal{R}\,b$. Allora $\underline{a}\,\mathcal{R}\,\underline{b}$ in S/ρ, pertanto, poiché S/ρ è una banda regolare sinistra, $\underline{a} = \underline{b}$, così $\mathcal{R} \subseteq \rho$, quindi $\mathcal{R}' \subseteq \rho$.

In ogni teorema che segue l'equivalenza di (i) e (ii) è stata provata da M. Petrich in /8/.

DEFINIZIONE 2.3. Una banda E è detta una banda semiregolare destra [risp. sinistra] sse $yxa = yxyayxa$ [risp. $axy=axyayxy$] per ogni $a,x,y \in E$.
Una banda E è detta una banda regolare sse $axya = axaya$, per ogni $a,x,y \in E$.

TEOREMA 2.3.

Per un ortogruppo S con insieme degli idempotenti E, sono equivalenti:

i) E è una banda semiregolare destra;

ii) $\mathcal{R}^E$ è una congruenza;

iii) $\mathcal{R}$ è una congruenza Λ-destra;

iv) Per ogni $a,x \in E$ ed $y \in S$: $axyS = axayS$.

Dim.-

i) $\Longrightarrow$ ii) Siano $e,f \in E$ tali che $e\mathcal{R}^E f$, cioé $ef = f$, $fe = e$ (cfr. Teorema 1.1). Allora per ogni $g \in E$

$$fg = efg = efegefg = egfg.$$

analogamente $eg = fgeg$. Allora, per il Teorema 1.1, $eg\mathcal{R}^E fg$; pertanto $\mathcal{R}^E$ è una congruenza.

ii)$\Longrightarrow$iii) Siano a,b due elementi di S tali che $a\mathcal{R}b$, allora $\hat{a}\mathcal{R}\hat{b}$. Per il Teorema 1.5, $\hat{a}\mathcal{R}^E\hat{b}$ e, per l'ipotesi, $\hat{a}\hat{c}\mathcal{R}^E\hat{b}\hat{c}$ per ogni $c \in S$; inoltre, $\hat{a}\hat{c}E = \hat{b}\hat{c}E$ implica $\hat{a}\hat{c}ES = \hat{b}\hat{c}ES$ e quindi $\hat{a}\hat{c}S = \hat{b}\hat{c}S$, essendo $ES = S$. Tenendo conto che $s\hat{c}S = scS$ per ogni $s \in S$, si ottiene che $\hat{a}cS = \hat{b}cS$ cioé $\hat{a}c\mathcal{R}\hat{b}c$.

iii) $\Longrightarrow$iv) Siano a,x elementi di E, allora $ax\mathcal{R}axa$ con ax ed axa idempotenti, pertanto dall'ipotesi, $axy\,\mathcal{R}\,axay$ per ogni $y \in S$.

iv) $\Longrightarrow$i) Siano a,x,y elementi di E; per l'ipotesi, $yxa\mathcal{R}yxya$, quindi per il Teorema 1.1

$$yxa = yxyayxa.$$

TEOREMA 2.4.

Per un ortogruppo S con insieme degli idempotenti E, sono equivalenti:

i) E è una banda regolare

ii) $\mathcal{R}^E, \mathcal{L}^E$ sono congruenze

iii) $\mathcal{R}$ è una congruenza Λ-destra, $\mathcal{L}$ è una congruenza Λ-sinistra

iv) Per ogni $a,x,y \in E$: $axySxya = axaySxaya$.

Dim.-

i) $\Longrightarrow$ ii) Se E è una banda regolare, allora E è una banda semiregolare destra e sinistra, infatti, per ogni $a,x,y \in E$

$$yxa = yxayxa = (yxay)xa = (yxyay)xa = yxyayxa$$

$$axy = axyaxy = ax(yaxy) = \qquad = ax(yayxy) = axyayxy.$$

Per il Teorema 2.3 e il suo duale $\mathscr{R}^E$ e $\mathscr{L}^E$ sono congruenze.

ii) $\Longrightarrow$ iii) e iii) $\Longrightarrow$ iv) Immediate dal Teorema 2.3 e duale.

iv) $\Longrightarrow$ i) Per ogni $a,x,y \in E$

$$axy = (axy)^3 = (axy)a(xya)xy \in axySxyaS =$$
$$= axaySxayaS \subseteq axayS$$

$$axay = (axay)^3 = (axay)a(xaya)xay \in axaySxayaS =$$
$$= axySxyaS \subseteq axyS$$

cioé $axyS = axayS$; analogamente $Sxya = Sxaya$. Pertanto per il Teorema 1.1

$$axaya = (axay)a = (axy \cdot axay)a = a(xya \cdot xaya) = axya.$$

<u>DEFINIZIONE 2.4</u>.- Una banda E è detta <u>seminormale destra</u> [sinistra] sse $yxa = yayxa$ [$axy = axyay$] per ogni $a,x,y \in E$; una banda E è detta <u>normale sinistra</u> [destra] sse $axy = ayx$ [risp. $yxa = xya$] , per ogni $a,x,y \in E$.

<u>TEOREMA 2.5</u>.

Per un ortogruppo S con insieme degli idempotenti E, sono equivalenti:

i) E è una banda seminormale destra;

ii) $\mathscr{R}^E$ è una congruenza e $E/\mathscr{R}^E$ è una banda normale sinistra

iii) $\mathscr{R}$ è una congruenza Λ-destra e $S/\mathscr{R}$ è una banda normale sinistra,

iv) Per ogni $a,x,y \in E$: $axyS = ayxS$.

i) $\Longrightarrow$ ii) Se E è una banda seminormale destra, allora E è una banda semiregolare destra; infatti, poiché per ogni $a,x,y \in E$

$$yxa = (yx)^2a = yx(yxa) = yxyayxa$$

per il Teorema 2.3, $\mathcal{R}^E$ è una congruenza. Da questo,

$$axyE = axayE; \qquad ayxE = ayaxE$$

per ogni $a,x,y \in E$, pertanto

$(axay)ayax) = axayax = axa(ya)x = a(ya)x = ayax$

$(ayax)(axay) = ayaxay = aya(xa)y = a(xa)y = axay$

cioé $ayaxE = axayE$ (cfr. Teorema 1.1), quindi $axyE = ayxE$.

ii) $\Longrightarrow$iii) $\mathcal{R}^E$ è una congruenza, quindi per il Teorema 2.3 $\mathcal{R}$ è una congruenza Λ-destra. Inoltre, per ogni $\underline{a}, \underline{x}, \underline{y} \in S/\mathcal{R}$, poiché $E/\mathcal{R}^E$ è una banda normale sinistra e vale il Teorema 1.5

$$\underline{a}\;\underline{x}\;\underline{y} = \underline{\hat{a}}\;\underline{\hat{x}}\;\underline{\hat{y}} = \underline{\hat{a}\hat{y}\hat{x}} = \underline{\hat{a}\hat{y}\hat{x}} = \underline{a}\;\underline{y}\;\underline{x}$$

pertanto $S/\mathcal{R}$ è una banda normale sinistra.

iii) $\Longrightarrow$iv) Siano a,x,y elementi di E; poiché $S/\mathcal{R}$ è una banda normale sinistra

$$\underline{a}\;\underline{x}\;\underline{y} = \underline{a}\;\underline{y}\;\underline{x}$$

quindi $\underline{axy} = \underline{ayx}$, cioé $axyS = ayxS$.

iv) $\Longrightarrow$i) Per ogni $a,x,y \in E$ $yxaS = yaxS$, quindi esiste $z \in S$ tale che $yxa = yaxz$. Allora

$$yayxa = ya(yxa) = ya(yaxz) = yaxz.$$

<u>DEFINIZIONE 2.5.</u> Una banda E è detta <u>quasinormale</u> destra [sinistra] sse $yxa = yaxa$ [$axy = axay$], per ogni $a,x,y \in E$. Una banda E è detta <u>normale</u> sse $axya = ayxa$ per ogni $a,x,y \in E$.

<u>TEOREMA 2.6.</u>

Per un ortogruppo S con insieme degli idempotenti E, sono equivalenti:

i) E è una banda quasi normale destra;

ii) $\mathcal{L}^E, \mathcal{R}^E$ sono congruenze e $E/\mathcal{R}^E$ è una banda normale sinistra;

iii) $\mathcal{L}$ è una congruenza Λ-sinistra, $\mathcal{R}$ è una congruenza Λ-destra e $S/\mathcal{R}$ è una banda normale sinistra;

iv) Per ogni $a,x,y \in E$: $axySxya = ayxSxaya$.

Dim. -

i) $\Longrightarrow$ ii) Se E è una banda quasi normale destra, allora E è una banda seminormale destra e semiregolare sinistra; infatti

$$yxa = y(yx)a = ya(yx)a = yayxa$$
$$axy = axy(axy) = axy(ayxy) = axyayxy$$

per ogni $a,x,y \in E$. Allora per il Teorema 2.5 e il duale del Teorema 2.3, vale la ii).

ii) $\Longrightarrow$ iii) e iii) $\Longrightarrow$ iv) Immediate dal Teorema 2.5 e dal duale del Teorema 2.3.

iv) $\Longrightarrow$i) Per ogni $e,f,g \in E$

$$e\,f\,g = (efg)^3 = (efg)e(fge)fg \in efgSfgeS =$$
$$= egfSfegeS \subseteq egfS$$

analogamente $egf \in efgS$, pertanto $efgS = egfS$ (1).

Inoltre, per ogni $a,x,y \in E$

$$yxa = (yxa)^3 = yx(ayx)a(yxa) \in SayxSyxa =$$
$$= SaxySyaxa \subseteq Syaxa$$
$$yaxa = (yaxa)^2 = ya(xay)axa =$$
$$= ya(xyaxay)axa \quad \text{(per la (1) e il Teorema 1.1)}$$
$$= y(axy)axa(yaxa) \subseteq SaxySyaxa \subseteq SayxSyxa \subseteq Syxa.$$

Allora, per il Teorema 1.1 e per la (1)

$$yaxa = yaxa\cdot yxa = ya(xa)y(xa)a = y(xa)a = yxa.$$

TEOREMA 2.7.

Per un ortogruppo S con banda degli idempotenti E, sono equivalenti:

i) E è una banda normale;

ii) $\mathcal{R}^E, \mathcal{L}^E$ sono congruenze, $E/\mathcal{R}^E$ è una banda normale sinistra, $E/\mathcal{L}^E$ è una banda normale destra;

iii) $\mathcal{R}$ è una congruenza Λ-destra, $S/\mathcal{R}$ è una banda normale sinistra, $\mathcal{L}$ è una congruenza Λ-sinistra, $S/\mathcal{L}$ è una banda normale destra.

iv) Per ogni $a,x,y \in E$: $axySxya = ayxSyxa$.

Dim.-

i) $\Longrightarrow$ ii) Se E è una banda normale, allora E è una banda quasi-normale sinistra e destra. Infatti

$$axay = axayaxay = ((ax)ay(ax))ay = (axyax)ay = $$
$$= ax(y(ax)ay) = ax(yaxy) = axy$$
$$yaxa = yaxa\ yaxa = ya((xa)ya(xa)) = ya(xayxa) =$$
$$= (ya(xa)y)xa = (yxay)xa = yxa$$

per ogni a,x,y in E. Allora, per i Teoremi 2.5 e duale vale la ii).

ii) $\Longrightarrow$ iii) e iii) $\Longrightarrow$ iv) Immediate dal Teorema 2.5 e duale.

iv) $\Longrightarrow$ i) Per ogni $a,x,y \in E$

$$axy = (axy)^3 = (axy)a(xya)xy \in axySxyaS = ayxSyxaS \subseteq ayxS$$

analogamente $ayx \in axyS$, quindi $axyS = ayxS$;

inoltre, in modo analogo, anche $Sxya = Syxa$. Allora per il Teorema 1.1.

$$axya = (axy)a = (ayxaxy)a = a(yxaxya) = ayxa.$$

Si ricordi che una banda E è detta regolare destra [sinistra] sse $xa = axa$ [$ax = axa$]

Teorema 2.8.

Per un ortogruppo S con insieme degli idempotenti E, sono equivalenti:

i) E è una banda regolare destra

ii) $\mathcal{R}^E = \mathcal{D}^E$

iii) $\mathcal{R} = \mathcal{D}$

iv) Per ogni $a,x \in S$: $xaS = axaS$

Dim. -

i) $\Longrightarrow$ ii) E' noto che $\mathcal{R}^E \subseteq \mathcal{D}^E$. Inoltre, se $a \mathcal{D}^E b$ (con a,b in E)

$$aba = a \quad , \quad bab = b.$$

Allora, $a = aba = ba$, $b = bab = b$; pertanto per il Teorema 1.1 $a \mathcal{R}^E b$

ii) $\Longrightarrow$ iii) E' noto che $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{D}$. Inoltre se $a \mathcal{D} b$ con $a,b \in S$ $\hat{a} \mathcal{D} \hat{b}$, allora per il Teorema 1.5 $\hat{a} \mathcal{D}^E \hat{b}$ e quindi $\hat{a} \mathcal{R}^E \hat{b}$. Per il Teorema 1.5 $\hat{a} \mathcal{R} \hat{b}$ e pertanto $a \mathcal{R} b$.

iii) $\Longrightarrow$ iv) Per ogni $a,x \in S$

$$SxaS = Sxa\hat{a}S = S\hat{a}xaS = Sa^{-1}axaS \subseteq SaxaS$$

e quindi $SxaS = SaxaS$ e, dall'ipotesi, $xaS = axaS$.

iv) $\Longrightarrow$ i) Per ogni $a,x \in E$, poiché per l'ipotesi $xa \mathcal{R} axa$, per il Teorema 1.1

$$xa = axaxa = axa$$

TEOREMA 2.9.

Per un ortogruppo S con insieme degli idempotenti E, sono equivalenti:

i) E è una banda normale destra;

ii) $\mathcal{R}^E = \mathcal{D}^E$, $\mathcal{L}^E$ è una congruenza e $E/\mathcal{L}^E$ è una banda normale destra;

iii) $\mathcal{R} = \mathcal{D}$, $\mathcal{L}$ è una congruenza Λ-sinistra e $S/\mathcal{L}$ è una banda normale destra;

iv) Per ogni $a,x,y \in E$: $xaSxya = axaSyxa$.

Dim. -

i) $\Longrightarrow$ ii) Se E è una banda normale destra, allora E è una banda regolare destra e normale. Infatti

$$xa = x(aa) = xaa = axa$$
$$axya = a(xya) = a(yxa) = ayxa$$

per ogni $a,x,y \in E$. Allora, per il Teorema 2.8 e per il Teorema 2.7 vale la ii).

ii) $\Longrightarrow$ iii), iii) $\Longrightarrow$ iv) Immediate dal Teorema 2.8 e dal duale del Teorema 2.5.

iv) $\Longrightarrow$ i) Per ogni $a,x \in E$

$$xa = (xa)^2 = (xa)a(xaa) \in xaSxaa = axaSaxa \subseteq axaS$$

analogamente $axa \in xaS$, pertanto $xaS = axaS$ (1).

Per ogni $a,x,y \in E$, per la (1)

$$xyaS = x(ya)S = (ya)x(ya)S = y(a(xy)aS) = y(xy)aS =$$
$$= yx(ya)S = yxayaS \subseteq yxaS$$

analogamente $yxaS \subseteq xyaS$, pertanto $xyaS = yxaS$ (2).

Inoltre

$$xya = (xya)^2 = (xya)a(xya) \in xyaSxya = yxaS\,x\,ya \quad \text{(per la (2))} \subseteq$$
$$\subseteq SxaSxya = SaxaSyxa \subseteq Syxa$$

$$yxa = (yxa)^2 = (yxa)a\,(yxa) \in yaxaSyxa \quad \text{(per la (1))} \subseteq$$
$$\subseteq SaxaSyxa = SxaSxya \subseteq Sxya$$

cioé $Syxa = Sxya$. Allora, gli idempotenti xya ed yxa sono nella stessa $\mathcal{H}$-classe, pertanto $xya = yxa$.

TEOREMA 1.10. -

Per un ortogruppo S con insieme degli idempotenti E, sono equivalenti:

i) E è un semireticolo;

ii) $\mathcal{R}^E = \mathcal{L}^E = \mathcal{D}^E$

iii) $\mathcal{R} = \mathcal{L} = \mathcal{D}$

iv) Per ogni $a \in S$: $aS = Sa$.

Dim. -

i) $\Longrightarrow$ ii) Immediata per la definizione delle relazioni di Green.

ii) $\Longrightarrow$ iii) Siano $a,b \in S$

$$a \,\mathcal{R}\, b \iff \hat{a} \,\mathcal{R}\, \hat{b} \iff \hat{a} \,\mathcal{L}\, \hat{b} \iff a \mathcal{L} b$$

inoltre

$$a \mathcal{L} b \iff \hat{a} \,\mathcal{L}\, \hat{b} \iff \hat{a} \,\mathcal{D}\, \hat{b} \iff a \mathcal{D} b$$

iii) $\Longrightarrow$ iv) Siano $a,b \in S$ poiché $ab\,\mathscr{D}\,ba$, per l'ipotesi $\mathscr{D}=\mathscr{R}$ e per il Teorema 1.1

$$
\begin{aligned}
ba &= \widehat{ba}\, ba = \widehat{ab}\, \widehat{ba}\, ba = \\
&= ab\,(ab)^{-1}\, ba \in aS
\end{aligned}
$$

cioé $Sa \subseteq aS$; Analogamente $aS \subseteq Sa$.

iv) $\Longrightarrow$ i) Siano $e,f \in E$, $ef\,\mathscr{D}\,fe$ quindi esiste $x \in S$ tale che $efS = xS$, $Sx = Sfe$. Pertanto, per l'ipotesi $efS = xS = Sx = Sfe = feS$ $Sef = efS = feS = Sfe$.

Allora per il Teorema 1.1

$$ef = ef \cdot fe = fe.$$

3. STRUTTURA DELGI ORTOGRUPPI. -

Sia S un ortogruppo; risulterà dal Teorema 3.1 seguente, che S è un semireticolo Y di gruppi rettangolari $S_\alpha (\alpha \in Y)$ e quindi il prodotto di un elemento x di S_α e di un elemento y di S_β è in $S_{\alpha\beta}$ ($\alpha\beta$ prodotto di α e β in Y). Ma tale teorema non chiarisce il modo in cui elementi di differenti S_α si possono moltiplicare tra loro.

Riprendendo un teorema di struttura per i semigruppi completamente regolari di Lallement [/7/, 1967],M. Petrich ottiene[/10/, 1974] un teorema di struttura "fine" per gli ortogruppi, chiarendo il modo in cui si moltiplicano gli elementi dei differenti S_α , tramite sistemi di applicazioni soddisfacenti certe proprietà; tuttavia M. Petrich non dà un procedimento effettivo di costruzione di tali sistemi.

La dimostrazione del teorema di M. Petrich si avrà ora (ottenendo una semplificazione della trattazione) utilizzando un risultato di Clifford [/2/, 1972] sugli ortogruppi a "due componenti".