$$\| F_{n+1} \|_G^2 - \| F_n \|_G^2 \leq 2(\sigma(E)f_n, \rho(E)f_n) \leq 0$$

e pertanto è verificata la (3.6).

Si noti che per il θ-metodo è $k = 1$ e $G = 1$

§4. Una classe di metodi lineari multistep G-stabili del secondo ordine.

Si consideri la classe di metodi a k-passi, $k \geq 2$

$$4.1 \qquad y_{n+k} - y_{n+i} = h\left[\alpha(f_{n+k} + f_{n+i}) + \beta \sum_{j=i+1}^{k-1} f_{n+j} + \gamma \sum_{j=0}^{i-1} f_{n+j}\right], \quad 0 \leq i \leq k-1$$

con la convenzione che le $\sum_{j=n}^{m}$ sono da ritenersi nulle quando $m < n$.

Si vogliono ricercare metodi G-stabili dalla (4.1) e di ordine massimo. Si verifica facilmente che le condizioni

b) $k - i = 2\alpha + \beta(k - i - 1) + \gamma i$

c) $\dfrac{k^2 - i^2}{2} = (k+i)\alpha + \beta \displaystyle\sum_{j=i+1}^{k-1} j + \gamma \sum_{j=1}^{i-1} j$

sono soddisfatte se e solo se $\gamma = 0$ e $2\alpha + (k-i-1)\beta = k-i$.

In questo caso i polinomi $\rho(\zeta)$ e $\sigma(\zeta)$ associati al metodo (4.1) per $i \neq 0$ hanno divisori comuni e pertanto la classe di metodi (4.1) è riconducibile alla seguente classe

$$4.2 \qquad y_{n+k} - y_n = h\left[\alpha(f_{n+k} + f_n) + \beta \sum_{j=1}^{k-1} f_{n+j}\right] .$$

Per lo studio di tali metodi si consideri la matrice G reale e simmetrica di ordine k

$$G = \begin{pmatrix} 2\alpha & \beta \dots & \beta & \beta \\ \beta & 2\alpha & \beta & \beta \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta & \beta & \beta & 2\alpha \end{pmatrix}$$

Indicati con Δ_i per $i = 1,..k$ i minori principali si vede facilmente che

$$\Delta_i = (2\alpha-\beta)^{i-1} \left[2\alpha +(i-1)\beta\right]$$

e pertanto la matrice G riesce definita positiva se $0 <\beta< 2\alpha$ oppure se $\beta < 0$ e $2\alpha > (1-k)\beta$.

Considerando la $\|\cdot\|_G^2$ già definita precedentemente risulta

$$\|F_{n+1}\|_G^2 - \|F_n\|_G^2 = 2\alpha\left[\sum_{i=1}^{k} \|f_{n+i}\|^2 - \sum_{i=0}^{k-1} \|f_{n+i}\|^2\right] +$$

$$2\beta\left[\sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=i+1}^{k}(f_{n+i},f_{n+j}) - \sum_{i=0}^{k-2} \sum_{j=i+1}^{k-1} (f_{n+i},f_{n+j})\right] = 2\alpha\left[\|f_{n+k}\|^2 - \|f_n\|^2\right]+$$

$$2\beta\left[\sum_{i=1}^{k-1}(f_{n+i},f_{n+k}) + \sum_{i=1}^{k-2} \sum_{j=i+1}^{k-1}(f_{n+i},f_{n+j}) - \sum_{i=1}^{k-1}(f_n,f_{n+i})- \sum_{i=1}^{k-2} \sum_{j=i+1}^{k-1}(f_{n+i},f_{n+j})\right]=$$

$$2\alpha\left[\|f_{n+k}\|^2 - \|f_n\|^2\right] + 2\beta\left[(f_{n+k}, \sum_{j=1}^{k-1} f_{n+j}) - (f_n, \sum_{j=1}^{k-1} f_{n+j})\right] =$$

$$2(f_{n+k} - f_n,\alpha(f_{n+k}+f_n) + \beta \sum_{j=1}^{k-1} f_{n+j}) = 2(\rho(E)f_n,\sigma(E)f_n) =$$

$$2(y_{n+k} - y_n,f_{n+k} - f_n) \leq 0 \qquad \text{per l'ipotesi (1.2).}$$

Si può quindi affermare che i metodi che si ottengono dalla (4.2) sono G-stabili e per essi si ha:

$$\|F_{n+1}\|_G^2 \leq \|F_n\|_G^2 \qquad \forall\ n\in N$$

Pertanto dalla (4.1) si ottengono metodi G-stabili di ordine massimo per:

$$0 < \beta < 2\alpha \qquad e \qquad 2\alpha+(k-1)\beta = k$$

oppure per

$$\beta < 0 \qquad e \qquad 2\alpha+(k-1)\beta = k\ .$$

Inoltre se la f soddisfa alla proprietà di stretta monotonia (1.3) si ha:

4.3 $$\| F_{n+1}\|_G^2 - \| F_n\|_G^2 \leq 2(\sigma(E)f_n,\rho(E)f_n) \leq -2\mu\|y_{n+k}-y_n\|^2 \leq 0\ .$$

La (4.3) consente di dire che la successione $\{\| F_n\|_G^2\}_{n\in N}$ è convergente ed è tale che

$$\| F_n\|_G^2 \leq \| F_1\|_G^2 \qquad \forall n \in N$$

e quindi la successione $\{y_n\}_{n\in N}$ è limitata.

Inoltre si ha

4.4 $$\lim_{n\to\infty} \| y_{n+k}-y_n\| = 0$$

Se $\{y_{p_n}\}_{n\in N}$ è una successione convergente estratta dalla $\{y_n\}_{n\in N}$ risulta per la (4.4) che è convergente allo stesso limite anche la successione $\{y_{p_n+k}\}_{n\in N}$.

Si vede facilmente che si può estrarre dalla $\{y_{p_n}\}_{n\in N}$ una successione $\{y_{h_n}\}_{n\in N}$ tale che le successioni $\{y_{h_n+i}\}_{n\in N}$ per $i = 0,\dots,k-1$ siano convergenti.

Posto allora

$$\lim_{n\to\infty} y_{h_n+i} = l_i \qquad i = 0,\dots,k-1.$$

considerando la (4.2) relativamente alle k successioni estratte e passando al limite per $n \to \infty$ si ottiene un sistema omogeneo di k equazioni in k incognite, la cui matrice dei coefficienti è la matrice G.

Il sistema ammette quindi soltanto la soluzione nulla ed essendo $\Omega = \{\bar{y}\}$ ne consegue che

$$l_i = \bar{y} \qquad \text{per} \quad i = 0,..,k-1$$

e che la successione $\{y_n\}_{n \in N}$ definita dalla (4.2) converge al punto di equilibrio.

Osservazione 1. - Se si considera la funzione

$$V : y_n \in R^S \to \| F_n \|_G^2 \in R$$

si ha che

$\forall\, y \in \Omega : V(y) = 0$

$\forall\, y \notin \Omega : V(y) > 0$

$\Delta V = V_{n+1} - V_n = \| F_{n+1} \|_G^2 - \| F_n \|_G^2 < 0$ lungo la soluzione numerica e pertanto per il teorema di Liapunov[8] l'insieme Ω é globalmente asintoticamente stabile in R^S per l'equazione (4.2).

Osservazione 2. - Tutto quanto si é ottenuto in questa nota porta a congetturare che se le condizioni iniziali soddisfano ad opportuni vincoli di disuguaglianza , se $\rho(1) = 0$ (*) ed f soddisfa alla condizione (1.2) allora un generico metodo k-step A-stabile soddisfa alla stesse proprietà della classe di metodi (4.2).

Osservazione 3.- Dalquist [2] ha provato nell'ipotesi (1.2) che se in luogo di un generico metodo k-step A-stabile si considera il corrispondente metodo one-leg

$$\sum_{j=0}^{k} \alpha_j\, y_{n+j} = h\, f\Big(\sum_{j=0}^{k} \beta_j\, y_{n+j} \Big) \tag{4.5}$$

si ha

$$\| Y_{n+1} \|_G^2 \leq \| Y_n \|_G^2 \tag{4.6}$$

ove si é posto $Y_n = (y_n^T, y_{n+1}^T, \dots, y_{n+k-1}^T)^T$, $y_n = y_n' - y_n''$ e $\{ y_n' \}_{n \in N}$, $\{y_n''\}_{n \in N}$ sono due successioni di vettori arbitrari che soddisfano all'equa-

(*) La condizione $\rho(1) = 0$ é una condizione necessaria come risulta evidente dall'equazione test $\dot{y} = \lambda y + q$ con $Re\lambda < 0$ e q preso opportunamente.

zione (4.5). Simula in tal modo la proprietà (2) del §1.

Si noti però che tali metodi non soddisfano alla (3.6) e viceversa i metodi lineari k-step A-stabili non soddisfano alla (4.6).

5. Risultati numerici.

All'equazione $\dot{y} = -y^3$, $y(0) = 1$ si sono applicati i metodi

I $$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(f_{n+1} + f_n)$$

e

II $$y_{n+2} = y_n + h\left[\frac{3}{4}(f_{n+2} + f_n) + \frac{1}{2} f_{n+1}\right]$$

usando come predizione il metodo ad un passo A-stabile del 2° ordine [4]

$$y_{n+1} = y_n + \left(1 - \frac{h}{2} f'_n\right)^{-1} h\, f_n$$

Nella tabella sono riportati in alcuni punti la soluzione teorica, la soluzione approssimata con il metodo I e $\| F_n \|^2_G$ per $h = 0.01$.

Nella tabella 2 ci sono gli analoghi risultati ottenuti con il metodo II.