Le condizioni cui deve soddisfare un metodo k-step del secondo ordine sono:

a) $\sum_{j=o}^{k} \alpha_j = 0$

b) $\sum_{j=o}^{k} \beta_j = \sum_{j=1}^{k} j\alpha_j$

c) $\sum_{j=1}^{k} j\beta_j = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{k} j^2 \alpha_j$

§3. Alcune considerazioni sul θ-metodo ed estensione a una classe di metodi lineari multistep A-stabili.

La classe di metodi lineari ad un passo del primo ordine è data da

3.1 $$y_{n+1} - y_n = h\left[(1-\theta)f_{n+1} + \theta f_n\right]$$

usualmente chiamata "θ-metodo".

Tale metodo è A-stabile se e solo se $\theta \leq \frac{1}{2}$ [3] ; in particolare per $\theta = 0$ si ritrova il metodo di Eulero, per $\theta = \frac{1}{2}$ la regola del trapezio risultando solo in questo caso del secondo ordine.

Se la f soddisfa alla condizione (1.2) risulta:

3.2 $$\| f_{n+1} \| \leq \| f_n \| \qquad \forall\, n \in N \;.$$

Infatti componendo scalarmente la (3.1) con $f_{n+1} - f_n$ si ha:

$$0 \geq ((1-\theta)f_{n+1}+\theta f_n, f_{n+1}-f_n) = (2\theta-1)(f_n, f_{n+1}) - \theta\|f_n\|^2 + (1-\theta)\|f_{n+1}\|^2$$

e tenuto conto che $2\theta-1 \leq 0$ e che

$$|(x,y)| \leq \|x\| \cdot \|y\| \leq \frac{1}{2}(\|x\|^2 + \|y\|^2) \qquad \forall x,y \in R^S$$

si ha:

$$\frac{1}{2}(\ \|f_{n+1}\|^2 - \ \|f_n\|^2) \leq (y_{n+1} - y_n, f_{n+1} - f_n) \leq 0 \quad .$$

Se la f é strettamente monotona si ha:

3.3 $$\|f_{n+1}\|^2 - \ \|f_n\|^2 \leq 2(y_{n+1} - y_n, f_{n+1} - f_n) \leq -2\mu \ \|y_{n+1} - y_n\|^2 \leq 0.$$

La (3.3) consente di dire che la successione $\{\|f_n\|\}_{n \in N}$ é convergente ed é tale che

$$\|f_n\| \leq \|f_1\| \qquad \forall\ n \in N$$

e quindi la successione $\{y_n\}_{n \in N}$ é limitata. Inoltre si ha:

3.4 $$\lim_{n \to \infty} \|y_{n+1} - y_n\| = 0$$

Indicato con $\bar{y}$ il limite della successione convergente $\{y_{k_n}\}_{n \in N}$ estratta dalla $\{y_n\}_{n \in N}$ per la (3.4) anche $\{y_{k_n+1}\}_{n \in N}$ converge a $\bar{y}$. Considerando la (3.1) relativamente alla $\{y_{k_n}\}_{n \in N}$ e passando al limite per $n \to \infty$ segue che necessariamente $\bar{y}$ é il punto di equilibrio e per l'unicità di esso anche $\{y_n\}_{n \in N}$ converge a $\bar{y}$.

Si consideri ora la classe di metodi a k-passi

3.5 $$y_{n+k} - y_{n+i} = h \sum_{j=0}^{k} \beta_j f_{n+j} \qquad \text{per} \quad 0 \leq i \leq k-1$$

e si ponga $F_n = (f_n^T, f_{n+1}^T, \ldots, f_{n+k-1}^T)^T$.

Si dimostra che se il metodo (3.5) é A-stabile ed f soddisfa alla (1.2), esiste una matrice G di ordine k reale simmetrica e definita positiva tale che:

3.6 $$\|F_{n+1}\|_G^2 \leq \|F_n\|_G^2 \quad .$$

Infatti componendo scalarmente la (3.5) con $\rho(E)f_n$ si ha:

$$(y_{n+k} - y_{n+i}, f_{n+k} - f_{n+i}) = h(\sigma(E)f_n, \rho(E)f_n) \leq 0$$

ed essendo il metodo A-stabile quindi G-stabile [2] esiste una matrice G simmetrica e definita positiva tale che :

$$\| F_{n+1} \|_G^2 - \| F_n \|_G^2 \leq 2(\sigma(E)f_n, \rho(E)f_n) \leq 0$$

e pertanto è verificata la (3.6).

Si noti che per il θ-metodo è $k = 1$ e $G = 1$

§4. Una classe di metodi lineari multistep G-stabili del secondo ordine.

Si consideri la classe di metodi a k-passi, $k \geq 2$

$$4.1 \qquad y_{n+k} - y_{n+i} = h\left[\alpha(f_{n+k} + f_{n+i}) + \beta \sum_{j=i+1}^{k-1} f_{n+j} + \gamma \sum_{j=0}^{i-1} f_{n+j}\right], \quad 0 \leq i \leq k-1$$

con la convenzione che le $\sum_{j=n}^{m}$ sono da ritenersi nulle quando $m < n$.

Si vogliono ricercare metodi G-stabili dalla (4.1) e di ordine massimo. Si verifica facilmente che le condizioni

b) $k - i = 2\alpha + \beta(k - i - 1) + \gamma i$

c) $\dfrac{k^2 - i^2}{2} = (k+i)\alpha + \beta \sum_{j=i+1}^{k-1} j + \gamma \sum_{j=1}^{i-1} j$

sono soddisfatte se e solo se $\gamma = 0$ e $2\alpha + (k-i-1)\beta = k-i$.
In questo caso i polinomi $\rho(\zeta)$ e $\sigma(\zeta)$ associati al metodo (4.1) per $i \neq 0$ hanno divisori comuni e pertanto la classe di metodi (4.1) è riconducibile alla seguente classe

$$4.2 \qquad y_{n+k} - y_n = h\left[\alpha(f_{n+k} + f_n) + \beta \sum_{j=1}^{k-1} f_{n+j}\right] .$$

Per lo studio di tali metodi si consideri la matrice G reale e simmetrica di ordine k

$$G = \begin{pmatrix} 2\alpha & \beta \cdots & \beta & \beta \\ \beta & 2\alpha & \beta & \beta \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \beta & \beta & \beta & 2\alpha \end{pmatrix}$$