dipendenza dal tempo del processo base della popolazione.

3. Catena binomiale di Markov in tempo discreto. -

Abbiamo visto che la (2) dà luogo ad un sistema omogeneo dal momento che p_{ij} è la stessa qualunque sia l'età x. Applichiamo allora il metodo descritto dianzi ad un sistema omogeneo. Vedremo dopo cosa accade se il sistema non è omogeneo.

Sappiamo che le distribuzioni di probabilità per il numero dei superstiti ed il tempo di estinzione di un gruppo in tempo discreto, basato sulla probabilità di sopravvivenza empirica $\hat{p}'_x(t)$, si possono ricavare semplicemente mediante sviluppo in serie binomiale [3] [4] .

Supponiamo che in un gruppo di dimensioni iniziali l_o, la probabilità di sopravvivenza di un individuo (appartenente al gruppo) dall'età x all'età $x+1$ sia p, indipendente dall'età o dal tempo.

Iniziando con l'_x individui vivi all'età x, la probabilità del numero l'_{x+1} di superstiti dopo l'intervallo $(x,x+1)$ è dato allora da:

$$(4) \qquad P_r \left\{ \frac{l'_{x+1}}{l'_x} \right\} = \binom{l'_x}{l'_{x+1}} p^{\,l'_{x+1}} (1-p)^{\,l'_x - l'_{x+1}}$$

Orbene, la (4) esprime le probabilità di transizione che governano una catena di Markov del tipo $\{l'_x\}_{x=o}^{\omega}$; gli stati di questa catena sono i numeri di sopravviventi $0,1,2,\ldots l'_o$.

E' chiaro che la distribuzione globale dei superstiti $l_1,\ldots,l_k (k<\omega)$ è data da:

$$(5) \qquad P_r \left\{ \frac{l'_1,\ldots,l'_k}{l'_o} \right\} = \prod_{x=o}^{k-1} \binom{l'_x}{l'_{x+1}} p^{\,l'_{x+1}} (1-p)^{\,l'_x - l'_{x+1}}$$

La distribuzione di l'_k , sarà allora espressa da:

$$(6) \qquad P_r \left\{ \frac{l'_k}{l'_o} \right\} = \binom{l'_o}{l'_k} (p^k)^{l'_k} \, (1-p^k)^{l'_o - l'_k}$$

dove non si tiene conto di $l_1,\ldots,l_{k-1}$ dato che la probabilità di sopravvivenza al tempo k sarà p^k.

Risulta che il tempo T, di estinzione del gruppo ci è fornito dalla relazione

$$(7) \qquad P_r \{T = \tau\} = P_r\{l'_x = 0\} - P_r\{l'_{x-1} = 0\} = $$
$$= (1-p^\tau)^{l'_o} - (1-p^{\tau-1})^{l'_o} .$$

Questa è una catena di Markov con matrice di transizione $\{l'_x\}$.
Si possono confrontare questi risultati con quelli ottenuti da Chiang [17], capitolo 10.

Se adesso facciamo l'ipotesi della non omogeneità della catena di Markov $\{l'_x\}_{x=0}^{\omega}$ ed in cui le probabilità di sopravvivenza $\hat{p}'_x(t)$ dipendono contemporaneamente dall'età e dal tempo, otteniamo analoghi risultati.
Infatti la (4) in questo caso rimane identica nella forma, salvo che dobbiamo sostituire a p la $\hat{p}'_x(t)$. Con tale sostituzione la distribuzione dei sopravviventi $l'_1,\ldots,l'_k$ $(k \leq \omega)$ è data da:

$$(8) \quad P_r \left\{ \frac{l'_1,\ldots,l'_k}{l_o} \right\} = \prod_{x=0}^{k-1} \binom{l'_x}{l'_{x+1}} \hat{p}'_x(t)^{l'_{x+1}} \, \hat{q}_x(t)^{l'_x - l'_{x+1}}$$

Se $k = \omega$, possiamo scrivere $d'_o = l'_o - l'_1,\ldots,d'_\omega = l'_\omega - l'_{\omega+1} = l'_\omega$

per i decessi consecutivi rispettivamente agli intervalli di età.

La (8), in tal caso, ci porta a scrivere

$$(9)\quad P_r\left\{\frac{d'_o,\dots,d'}{}\right\}= \frac{l'_o}{d'_o!\dots d'!}\,\hat{q}'_o(t)^{d'_o}\,\{\hat{p}'_o(t)\hat{q}'_1(t+1)\}^{d'_1}\,\dots\dots,$$

$$\{\hat{p}'_o(t)\,\hat{p}'_1(t+1)\,\dots\hat{p}'_{\omega-1}(t+\omega-1)\hat{q}\,(t+\omega)\}^{d'_\omega}$$

dove $\hat{q}'_\omega(t+\omega) = 1$, e leprobabilità di morte, con $1 \leq k \leq \omega$ date dalla:

$\hat{p}'_o(t)\,\dots\,\hat{p}'_{k-1}(t+k-1)\,\hat{q}'_k(t+k)$, soddisfano l'equazione

$$\hat{q}'_o(t)+\hat{p}'_o(t)\hat{q}'_1(t+1)+\dots\dots+\hat{p}'_o(t)\hat{p}'_o(t)\hat{p}'_1(t+1)\dots\hat{p}'_{\omega-1}(t+\omega-1) = 1$$

L'equazione (9) che abbiamo ricavato, migliora l'approssimazione fornita da Chiang[17,pag. 225] , e ciò proprio perché abbiamo tenuto presenti contemporaneamente l'età ed il tempo.

Con tali risultati ci troviamo di fronte ad una distribuzione di sopravviventi $l'_k(1 \leq k \leq \omega)$ del tipo:

$$(10)\qquad P_r\left\{\frac{l'_k}{l'_o}\right\} = \binom{l'_o}{l'_k}\{\hat{p}'_o(t)\dots\hat{p}'_{k-1}(t+k-1)^{l'_k}\}\,.$$

$$\{1-\hat{p}'_o(t)\dots\hat{p}'_{k-1}(t+k-1)\}^{l'_o-l'_k}$$

dalla quale possiamo ricavare la probabilità del tempo di estinzione del gruppo, ossia, in modo analogo alla (7)

$$(11)\qquad P_r\,\{T=\tau\} = P_r\left\{l'_\tau = 0\right\} - P_r\,\{l'_{\tau-1} = 0\} =$$

$$= \{1-\prod_{k=o}^{\tau-1}\hat{p}'_k(t+k)\}^{l'_o} - \{1-\prod_{k=o}^{\tau-1}\hat{p}'_k(t+k)\}^{l_o}$$

E' bene notare che la (11) risulta comodissima nelle questioni di matematica attuariale, soprattutto quando interessa la valutazione della probabilità del tempo di estinzione di uno o più gruppi.

4. - Distribuzioni per età e curve di mortalità. -

Le curve delle probabilità di sopravvivenza o di mortalità, come quelle in fig. 8

Figura 8

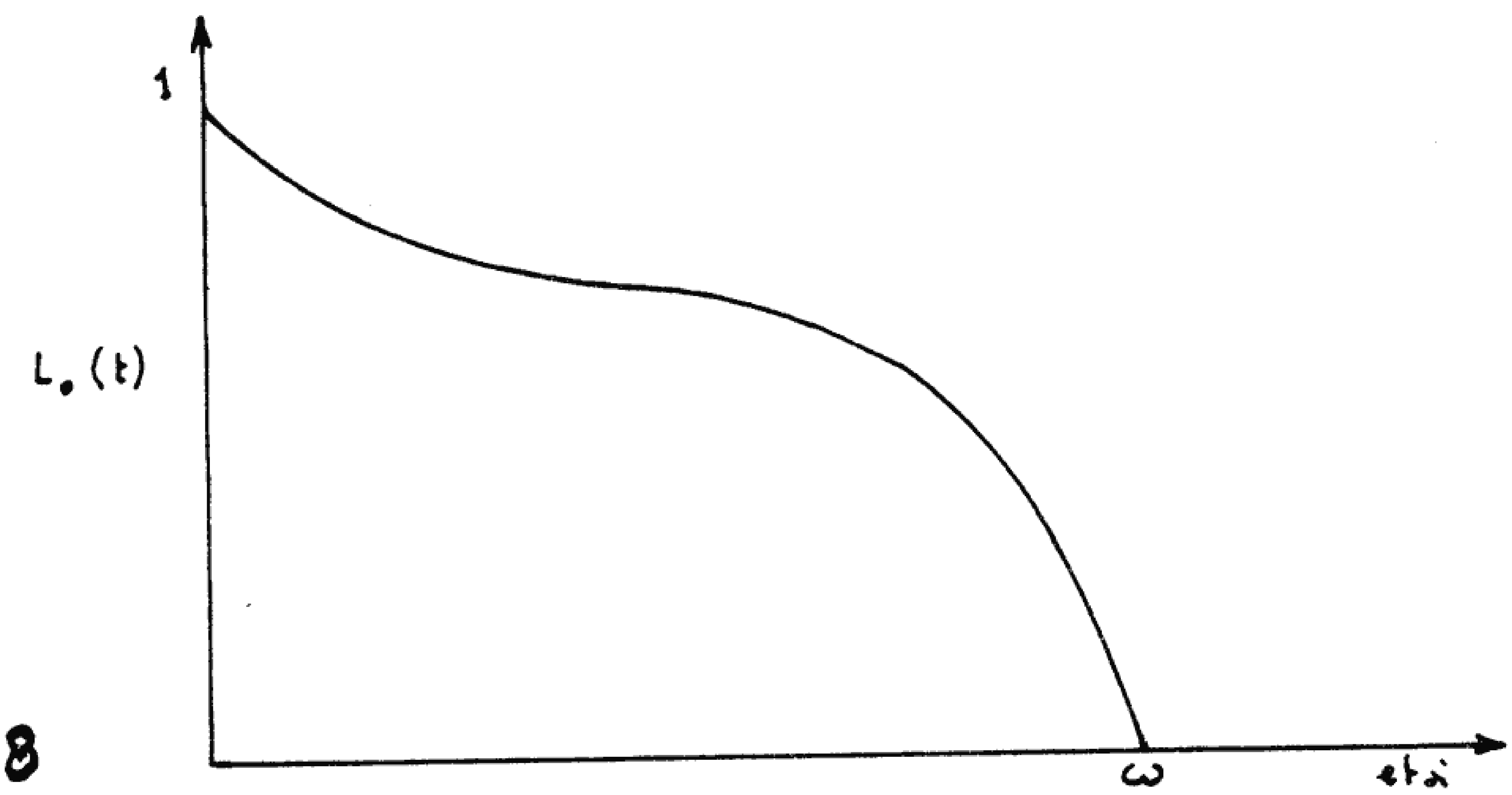

fig. 8

sono state a lungo usate nella letteratura attuariale per specificare le possibilità di sopravvivenza di un individuo all'età t; esse sono infatti, le equivalenti teoriche in tempo continuo alla base di quelle in tempo discreto delle tavole di vita viste in precedenza.

Possiamo osservare che se $\bar{L}_0(t)$ è la funzione di distribuzione per $T > 0$, alla morte di un individuo nato al tempo zero, allora la curva di mortalità è data da $L_0(t) = 1 - \bar{L}_0(t)$.

Per illustrare le relazioni fra i dati di vita per gruppi mostrati nella tavola 1 e la sommaria valutazione $\bar{L}_\tau(t)$ delle loro associate curve di