definito sulle funzioni $g \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ è un operatore pseudodifferenziale [1] Φ è un operatore differenziale quando $p(\lambda)$ è un polinomio; ciò accade nel caso degli spazi iperbolici di dimensione dispari.

Se $f \in C_c^\infty(X)$, $\Phi(e^{\rho s}\hat{f}(s,b))$ risulta, per ogni $b \in B$, una funzione a quadrato sommabile in $\mathbb{R}$ la cui trasformata di Fourier è la funzione $\overline{p(\lambda)}\,\tilde{f}(\lambda,b)$.

Si ha così la seguente formula di inversione per la trasformazione di Radon:

$$(3)\quad f(x) = c\int_B e^{\rho A(x,b)}\left(\int_{\mathbb{R}} p(\lambda)e^{i\lambda A(x,b)}\,\widetilde{\Phi(e^{\rho s}\hat{f}(s,b))}(\lambda)d\lambda\right)db$$

dove $c = (2\sqrt{2\pi})^{-\frac{1}{2}}$

Notiamo che si ha

$$\|f\|^2_{L^2(X)} = c\int_B\left(\int_{\mathbb{R}} |\Phi\, e^{\rho s}\hat{f}(s,b)|^2 ds\right)db$$

e, per polarizzazione,

$$(f,g)_{L^2(X)} = c\int_B\int_{\mathbb{R}} \Phi(e^{\rho s}\hat{f}(s,b))\,\overline{\Phi(e^{\rho s}\hat{g}(s,b)}ds\,db.$$

4. TEORIA ASTRATTA DELLO SCATTERING. -

Sia H uno spazio di Hilbert e $U(t) : H \to H$, $-\infty < t < \infty$, un gruppo ad un parametro di operatori unitari.

Due sottospazi chiusi di H, $\mathcal{D}_-$ e $\mathcal{D}_+$ vengono detti rispettivamente "incoming" e "outgoing" per il gruppo $U(t)$, se

---

(1) Useremo la notazione $\sim$ sia per la trasformata di Fourier di funzioni di variabile reale, sia per le funzioni su X.

i. $U(t)\mathcal{D}_- \subset \mathcal{D}_-$ per $t \leq 0$

ii. $U(t)\mathcal{D}_+ \subset \mathcal{D}_+$ per $t \geq 0$

iii. $\bigcap_{t<0} U(t)\mathcal{D}_- = 0 = \bigcap_{t>0} U(t)\mathcal{D}_+$

iv. $\overline{\bigcup U(t)\mathcal{D}_-} = \overline{\bigcup U(t)\mathcal{D}_+} = H$

Se $U(t)$ possiede uno spazio uotgoing (incoming), allora esistono due isometrie $R_\pm : H \to L^2(\mathbb{R},\mathcal{N})$, dove $\mathcal{N}$ è un opportuno spazio di Hilbert, tale che

$R_\pm$ trasforma $\mathcal{D}_\pm$ in $L^2(R_\pm,\mathcal{N})$ e l'azione di $U(t)$ in H nella traslazione per t in $L^2(\mathbb{R},\mathcal{N})$. Le rappresentazioni R_+ e R_- vengono dette rispettivamente rappresentazione per traslazione outgoing e incoming.

L'operatore di scattering $S = R_- R_+^{-1}$ è allora un operatore unitario di $L^2(\mathbb{R},\mathcal{N})$ in sé, che commuta con le traslazioni.

Se $L^2(\mathbb{R}_-,\mathcal{N})$ è un sottospazio invariante per S, si dice che S è causale.

La proprietà di causalità si può esprimere, utilizzando la trasformata di Fourier $\sim$:

L'operatore $\mathcal{S} = \sim S^{\sim -1}$ è causale se mappa lo spazio di Hardy $\mathcal{Q}_+$ (1) in sé.

Notiamo che l'operatore $\mathcal{S}$ è la moltiplicazione per una funzione $\mathcal{S}(\sigma)$, i cui valori sono operatori unitari di $\mathcal{N}$ in sé.

$\mathcal{S}(\sigma)$ si dice "matrice dello scattering ([6]).

(1) $\mathcal{Q}_+$ consiste delle funzioni f olomorfe nel semipiano superiore e a valori in $\mathcal{N}$ e tali che

$$\int |f(\xi+i\eta)|^2 d\xi < C \qquad \forall \eta > 0$$