L'applicazione $f \to \tilde{f}$ si estende ad una isometria tra $L^2(X)$ e $L^2(a^* x B)$, dove su $a^* x B$ si consideri la misura $1/2|c(\lambda)|^{-2}\, d\lambda\, db$.

3. LA TRASFORMATA DI RADON. -

La trasformata di Radon è definita, per $f \in C_c^\infty(X)$, nel modo seguente:

se $\xi = \xi(x,b)$ allora $\hat{f}(\xi) = \int_\xi f(x) ds(x)$

dove $ds(x)$ è l'elemento di volume indotto su ξ dalla struttura riemanniana di X.

Nel corso di questo lavoro, intenderemo però per trasformata di Radon di f, la funzione $\hat{f}$ definita su $a \times B$ da $\hat{f}(s,b) = \hat{f}(\xi)$ dove ξ è l'horociclo per b che ha distanza segnata s da j, ovvero $\xi=\xi(x,b)$ dove $A(x,b) = s$.

Si ha allora:

(1) $\tilde{f}(\lambda,b) = \int_a \hat{f}(x,b)\exp(-i\lambda+\rho)s)ds$ ([2],p. 93)

e

(2) $e^{\rho s}\int_B \hat{f}(s,b)db = e^{-\rho s}\int_B \hat{f}(-s,b)db$ ([3], p.680) .

Notiamo che, per ogni $b \in B$, la funzione della variabile reale λ

$$\tilde{f}(\lambda,b) = 1/\sqrt{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(s,b)\, e^{(-i\lambda+\rho)s} ds$$

è la trasformata di Fourier della funzione della variabile reale s:

$$\hat{f}(s,b)e^{\rho s} .$$

E' facile verificare, dall'espressione di $\overline{p(\lambda)} = c(-\lambda)^{-1}$ (vedere 2), che l'operatore

$$(\mathcal{P}\, g)(s) = 1/\sqrt{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \tilde{g}(\lambda)\overline{p(\lambda)}e^{i\lambda s}d\lambda$$

definito sulle funzioni $g \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ è un operatore pseudodifferenziale [1]
Φ è un operatore differenziale quando $p(\lambda)$ è un polinomio; ciò accade nel caso degli spazi iperbolici di dimensione dispari.

Se $f \in C_c^\infty(X)$, $\Phi(e^{\rho s}\hat{f}(s,b))$ risulta, per ogni $b \in B$, una funzione a quadrato sommabile in $\mathbb{R}$ la cui trasformata di Fourier è la funzione $\overline{p(\lambda)}\,\tilde{f}(\lambda,b)$.

Si ha così la seguente formula di inversione per la trasformazione di Radon:

$$(3)\quad f(x) = c\int_B e^{\rho A(x,b)}\left(\int_{\mathbb{R}} p(\lambda)e^{i\lambda A(x,b)}\,\widetilde{\Phi(e^{\rho s}\hat{f}(s,b))}(\lambda)d\lambda\right)db$$

dove $c = (2\sqrt{2\pi})^{-\frac{1}{2}}$

Notiamo che si ha

$$\|f\|^2_{L^2(X)} = c\int_B\left(\int_{\mathbb{R}} |\Phi\, e^{\rho s}\hat{f}(s,b)|^2 ds\right)db$$

e, per polarizzazione,

$$(f,g)_{L^2(X)} = c\int_B\int_{\mathbb{R}} \Phi(e^{\rho s}\hat{f}(s,b)\,\overline{\Phi(e^{\rho s}\hat{g}(s,b)}\,ds\,db.$$

4. TEORIA ASTRATTA DELLO SCATTERING. -

Sia H uno spazio di Hilbert e $U(t) : H \to H$, $-\infty < t < \infty$, un gruppo ad un parametro di operatori unitari.

Due sottospazi chiusi di H, $\mathcal{D}_-$ e $\mathcal{D}_+$ vengono detti rispettivamente "incoming" e "outgoing" per il gruppo $U(t)$, se

---

(1) Useremo la notazione $\sim$ sia per la trasformata di Fourier di funzioni di variabile reale, sia per le funzioni su X .