(8) $$\Lambda = \{ \sum_{n\in A} m(y_n) \ ; \ A \subset \mathbb{N}\} \ .$$

L'inclusione $R_m \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} [\lambda,\lambda+m(Z)]$ è evidente. L'inclusione opposta si prova come segue: se $x\in [\lambda,\lambda+m(Z)]$, allora $x-\lambda \in [0,m(Z)]$ e perciò esiste $B \subset Z$, con $B \in \mathcal{A}$, tale che $m(B) = x-\lambda$. Essendo $\lambda\in\Lambda$ esiste $A \subset Y$ tale che $m(A) = \lambda$, e poiché $A\cap B = \emptyset$ risulta $m(A \cup B) = \lambda+(x-\lambda) = x$.

Poniamo $a = \sum_{n=1}^{\infty} m(y_n)$. Dalla (7) e (8) si vede che, nel caso in cui gli atomi sono in numero finito, $R_m$ è unione finita di intervalli chiusi, mentre nel caso in cui gli atomi sono un'infinità numerabile, si hanno i seguenti casi:

a) se $\Lambda = [0,a]$, allora $R_m = [0,a+m(Z)] = [0,m(X)]$

b) Se $\Lambda$ è unione finita d'intervalli disgiunti, oppure è un insieme tipo Cantor ed è $m(Z) > 0$, allora $R_m$ è unione finita d'intervalli chiusi. Se $p$ è il primo indice per cui vale la (5) ed è $m(Z) \geq a_1 + \ldots + a_{p-1} + 2a_p - 1$, dove $a_k=m(y_k)$, allora $R_m = [0,m(X)]$.

In breve possiamo dire:

<u>Proposizione</u> (2). Se $m$ è una misura non negativa e limitata sulla $\sigma$-algebra $\mathcal{A}$ di parti di $X$, allora $R_m$ è finito, o coincide con $[0,m(X)]$, o è unione finita d'intervalli chiusi, ed è un insieme tipo Cantor solo nel caso in cui $m(Z)$ è uguale a zero, cioé è nulla la componente continua.

Questo enunciato è più esauriente del noto risultato richiamato col teorema (1).

## 6 - <u>Conseguenze del Teorema (2) per le masse</u>. -

Sia $m : \mathcal{P}(X) \to [0,+\infty)$ finitamente additiva e sia $R_m$ infinito. E' noto (cfr. [3] Teorema (3.3) che esiste $\{X_n \subset X; x \in \mathbb{N}\}$ partizione di $X$, con $m(X_n) > 0$, su cui $m$ è numerabilmente additiva. Considerata la $\sigma$-algebra $\mathcal{A}$ generata da $\{X_n ; n\in\mathbb{N}\}$, $m$ risulta numerabilmente additiva su $\mathcal{A}$. Osservato che:

$$\mathcal{A} = \{ \bigcup_{n\in A} X_n \ ; \ A \subset \mathbb{N}\}$$

(9) $$m(\mathcal{A}) = \{\sum_{n\in A} m(X_n) \ ; \ A \subset \mathbb{N}\} \subset R_m \subset [0,m(X)] \ .$$

La (9) ci permette di enunciare la seguente:

Proposizione (3). Se $m : \mathcal{P}(X) \to [0,+\infty)$ è finitamente additiva, allora $R_m$ o è finito oppure contiene un insieme del tipo $P$ (cfr. (2)).

Tale proposizione è più esauriente del noto risultato: $R_m$ è finito oppure è denso in sé (cfr. [3]). Nel caso in cui si conoscono le $X_n$ si ha per esempio:

Proposizione (4). Se le $X_n$ sono ordinate in modo che $(m(X_n))_n$ sia decrescente e risulta $m(X_n) \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} m(X_k)$ per ogni $n\in\mathbb{N}$, allora necessariamente $R_m = [0,m(X)]$.

(E' una semplice conseguenza della d) del Teorema (3).)

La condizione della proposizione (4) affinché sia $R_m = [0,m(X)]$ è più debole della continuità della $m$, come mostra l'esempio d) e la seguente

Proposizione (5). Se $m$ è continua, allora esiste $\{X_n ; n\in\mathbb{N}\}$, partizione su cui $m$ è numerabilmente additiva, tale che $m(X_n) \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} m(X_k)$ per ogni $N \in \mathbb{N}$.

Dim. - Considerata una successione $(X_n)_n$ su cui $m$ è n.a., se non risulta $m(X_1) \leq \sum_{k=2}^{\infty} m(X_k)$, si ripartisce $X_1$ in $X_1'$ e $X_1''$ in modo tale che risulti $m(X_1') = m(X_1'') = \frac{1}{2}\ m(X_1)$. Indicando ora $X_1'$ come $X_1$, $X_1''$ come $X_2$, ecc., risulterà $m(X_1) \leq \sum_{k=2}^{\infty} m(X_k)$. Si confronta ora $m(X_2)$ con $\sum_{k=3}^{\infty} m(X_k)$ e si procede come prima. $\square$

Un'altra informazione su $R_m$ può essere data usando le conseguenze del teorema di rappresentazione di Stone (cfr. [5] pag. 23 e pag. 201 e [6]).

Sia $m$ una massa sull'algebra $\mathcal{A}$. Denotiamo con $[\mathcal{A}]$ lo spazio di Stone associato ad $\mathcal{A}$ : $[\mathcal{A}]$ è l'insieme degli ultrafiltri su $\mathcal{A}$. Esiste un omomorfismo h tra $\mathcal{A}$ e $\mathcal{P}([\mathcal{A}])$, definito da

$$h(A) = \{\beta \in [\mathcal{A}] : A \in \beta\} = A^* \qquad \text{per ogni} \quad A\in\mathcal{A}$$

La famiglia $\mathcal{A}^* = \{A^* : A \in \mathcal{A}\}$, considerata come base degli aperti su $[\mathcal{A}]$, induce una topologia che rende $[\mathcal{A}]$ spazio topologico compatto e totalmente disconnesso. Inoltre $\mathcal{A}^*$ coincide con l'algebra dei sottoinsiemi contemporaneamente chiusi ed aperti (clopen) di $[\mathcal{A}]$.

Su $\mathcal{A}^*$ può essere definita una massa $m^*$ ponendo $m^*(A^*) = m(A)$ per ogni $A \in \mathcal{A}$. Tale massa è una misura in quanto se $\emptyset \neq A_n \in \mathcal{A}^*$ e $A_n \cap A_m = \emptyset$, necessariamente $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \notin \mathcal{A}^*$. Prolungata $m^*$ sulla $\sigma$-algebra $\mathcal{A}^*_\sigma$ generata da $\mathcal{A}^*$, risulta

$$\bar{R}_m = \overline{\{m^*(A^*) : A^* \in \mathcal{A}^*\}} = \{m^*(A) : A \in \mathcal{A}^*_\sigma\} .$$

Da ciò segue:

<u>Proposizione</u> (6). Se m è una massa sull'algebra $\mathcal{A}$, allora per $\bar{R}_m$ valgono le stesse alternative della Proposizione (2).

## B I B L I O G R A F I A


[1] KAI RANDER BUCH - *Some investigations of the set of values of measures in abstract space*, Mat. Fys. Medd. <u>21</u> (1945)

[2] P.R.HALMOS - *On the set of values of a finite measure*, Bull. Amer. Math. Soc. <u>53</u> (1947), 138-141.

[3] A.SOBCZGK e P.C.HAMMER - *The ranges of additive set functions*, Duke Math.J. <u>11</u> (1944), 847-851.

[4] F.HAUSDORFF - *Set theory*, Chelsea Publ. Co. -N.Y. (1962).

[5] R. SIKORSKI - *Boolean Algebras*, Springer (1969)

[6] G.H.GRECO e M.P.MOSCHEN - *Algebre d'insiemi e misure finitamente additive*, Bollettino U.M.I. (5) <u>18</u>-B (1982).