Lemma 3.1. *Se* $f \in \mathcal{H}_G$ *è E-ortogonale a* $\tilde{\mathcal{H}}$ *allora* $f_2^{(o)} = 0$ *e* $f_1^{(o)} = c\, y^{(\frac{n+1}{2})}$ *se* $y \geq a$.

Con l'aiuto di questo lemma la dimostrazione del seguente teorema diventa del tutto simile a quella del teorema 6.6 pag. 126 di [6].

Teorema 3.1. *Sia* $K = \mathcal{H}_G \ominus \tilde{\mathcal{H}}$, *allora per ogni* λ *nel risolvente di* A , *l'operatore* $(\lambda I - A)^{-1}$ *trasforma la palla unitaria di* K *in un sottoinsieme compatto di* $\mathcal{H}_G$.

n.4. La rappresentazione per traslazioni; spazi di entrata e di uscita.-

Definiamo i seguenti spazi:

$$\begin{cases} \mathcal{D}_+ = \{f \in \tilde{\mathcal{H}} \,/\, \sigma(f) \in \mathbb{D}_+\} \\ \mathcal{D}_- = \{f \in \tilde{\mathcal{H}} \,/\, \sigma(f) \in \mathbb{D}_-\} \end{cases} \tag{4.1}$$

$\mathcal{D}_+$ e $\mathcal{D}_-$ coincidono con gli spazi chiusi generati dai dati del tipo (3.7) e (3.8) rispettivamente; valgono inoltre i seguenti fatti:

$\mathcal{D}_+ + \mathcal{D}_- = \tilde{\mathcal{H}}$, $\mathcal{D}_+$ è ortogonale a $\mathcal{D}_-$, inoltre $\mathcal{D}_\pm$, $\tilde{\mathcal{H}}$ U(t) soddisfano le condizioni (i)(ii)(iii) di § 2 a pag. 12 di [6], in quanto σ risulta essere un'isometria di $\tilde{\mathcal{H}}$ (con energia E) sullo spazio libero $\mathbb{H}$ (con energia $\mathbb{E}$) che traforma $\mathcal{D}_\pm$ rispettivamente in $\mathbb{D}_\pm$.

Ora seguendo [6] poiché $\mathcal{D}_+$ e $\mathcal{D}_-$ non sono in $\mathcal{H}'_E$ proiettiamo $\mathcal{H}_G$ su tutto $\mathcal{H}'_E$ mediante la proiezione E-ortogonale:

$$Q' : \mathcal{H}_G \to \mathcal{H}'_E \tag{4.2}$$

$$Q'f = f + \sum_j a_j f_j^+ + \sum_j b_j f_j^-$$

dove $a_j = \dfrac{E(f,f_j^+)}{\lambda_j^2}$ e $b_j = \dfrac{E(f,f_j^-)}{\lambda_j^2}$.

Considerazioni analoghe a quelle fatte in [4] provano che per $\mathcal{D}_{\pm} = \mathcal{Q}' \mathcal{D}_{\pm}$ valgono i seguenti fatti:

$\mathcal{D}'_{\pm}$ sono chiusi in $\mathcal{H}'_E$ e soddisfano le condizioni (i)(ii)(iii) di § 2 a pag.12 di [6], $\mathcal{Q}'$ è una E-isometria iniettiva di $\mathcal{D}_{\pm}$ in $\mathcal{D}'_{\pm}$; inoltre

$$\mathcal{H}'_E = \mathcal{H}'_P \oplus \mathcal{H}'_C \tag{4.3}$$

dove $\mathcal{H}'_p$ è lo spazio generato dai dati $f \in \mathcal{H}_1$ tali che $A(f)$ è nullo in $\mathcal{H}'_E$ ed X'_c è il complemento E-ortogonale delle autofunzioni di A in H'_E.

Risulta: $\mathcal{H}'_C \subset \overline{\cup U(t) \mathcal{D}'_{\pm}}$

Troveremo ora le rappresentazioni per traslazione di $\mathcal{D}'_+$ e $\mathcal{D}'_-$ su $\mathcal{H}'_C$ provando così che $U(t)$ ha uno spettro assolutamente continuo su $\overline{\cup U(t) \mathcal{D}'_{\pm}}$ e pertanto $\overline{\cup U(t) \mathcal{D}'_{\pm}} \subseteq \mathcal{H}'_C$.

Se f è un dato C_0^∞ nullo per $y \leq a$ e dipendente solo da y definiamo

$$\tilde{f}(z) = \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty | \Gamma} f(\gamma z)\, D(\gamma) \tag{4.4}$$

dove $D(\gamma) = (cz+d)^n$ se $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$; $\tilde{f}$ è allora un dato automorfo di peso n sul semipiano π che coincide con f sul dominio fondamentale F: se $z \in F$ e $\gamma \neq id$ allora $\gamma z \notin F$ e quindi

$$Im(\gamma z) < a \tag{4.5}$$

Per $\tilde{f}$ come in (4.4) possiamo definire $\sigma(\tilde{f})$ secondo le formule (3.3) in quanto $\tilde{f}$ è definita su tutto il semipiano, inoltre poiché $\tilde{f}$ coincide con f sul dominio fondamentale F si ha:

$$\begin{aligned} E(\tilde{f}) &= E(f) \\ U(t)\tilde{f} &= U(t)f \end{aligned} \tag{4.6}$$

su F.

Definiamo ora per f e $\tilde{f}$ come sopra:

$$\begin{aligned} R_+ f &= \mathbb{R}_+(\sigma(f)) \\ R_+ \tilde{f} &= \mathbb{R}_+(\sigma(f)) \end{aligned} \tag{4.7}$$

Ricordiamo che $\mathbb{R}_+$ denota l'operatore: $(g_1, g_2) \to \text{cost}\ (\partial_r g_1(r) - g_2(r))$.

Valgono i seguenti fatti (che discendono da analoghi fatti per la rappresentazione $\mathbb{R}$ su $\mathbb{H}$):

α) $\| R_+ f \| = E(f)$ (da (3.5))

β) $R_+ \ U(t)f = T(t)\ R_+ f$ (da(3.9))

γ) R_+ mappa $\mathfrak{D}_+$ su tutto lo spazio delle funzioni a quadrato sommabile con supporto in $\mathbb{R}_+$.

Proviamo che $R_+ \tilde{f} = R_+ f$ per $f \in \mathfrak{D}_-$.

Se $f_o = \{y^{(\frac{n+1}{2})} \phi(y), - y^{(\frac{n+3}{2})} \phi'(y)\}$ la soluzione di (2.1) con dato iniziale f_o è data da:

$$u_o(z,t) = y^{\frac{n+1}{2}} \phi(y\, e^{-t})$$

quindi per $t \geq 0$ anche $U(t)f_o$ si annulla per $y \leq a$ ne segue da (4.5) e (4.6) che per $t \geq 0$:

$$\widetilde{U(t)f_o} = U(t)f_o = U(t)\,\tilde{f}_o \qquad \text{su } F.$$

Quindi $R_+U(t)\, f_0 = R_+\, U(t)\, \tilde{f}_0$ per $t \geq 0$ e $y \geq a$; poiché inoltre $\sigma(\tilde{f}_0)$ dipende solo sa y, ancora una volta l'unicità della soluzione dell'equazione delle onde nello spazio libero con valore iniziale fissato garantisce che

$$T(t)\, \mathbb{R}_+ f_0 = T(t)\, R_+\, \tilde{f}_0$$

per ogni $t \geq 0$ ed $s \geq \log a$, da cui si deduce che tale uguaglianza vale per ogni s e quindi che

$$R_+\, f = R_+\, \tilde{f} \qquad \text{per} \quad f \in \overline{\bigcup U(t) \mathcal{D}_-}$$

E' ovvio inoltre che vale l'uguaglianza:

$$\| R_+ \tilde{f} \| = E(\tilde{f}) .$$

In modo analogo a (4.7) si definiscono:

$$R_-\, \tilde{f} = \mathbb{R}_-\, (\sigma(\tilde{f}))$$

$$R_-\, f = \mathbb{R}_-\, (\sigma(f))$$

Ricordando le espressioni di $\mathbb{R}_+$ e $\mathbb{R}_-$:

$$(\mathbb{R}_+\sigma(f))(r) = -\frac{1}{2}(\partial_r \sigma_1(f)(r) - \sigma_2(f)(r))$$

$$(\mathbb{R}_+\sigma(f))(r) = -\frac{1}{2}\, (\partial_r \sigma_1(f)-r) + \sigma_2(f)(-r))$$

ogni elemento $d'_+ \in \mathcal{D}'_+$ si può scrivere:

$$d'_+ = d_+ + p$$

dove $d_+ \in \mathcal{D}_+$ e $p \in \mathcal{P}$, inoltre si ha $E(d'_+) = E(d_+)$ e poiché $\| R_+ p \| = E(p) = 0$ $\forall p \in P \cap \mathcal{D}_+$, ha senso definire:

$$R_+\, d'_+ = R_+\, d_+ \quad .$$

E' chiaro a questo punto che R_+ (R_-) definisce una $\mathcal{D}'_+$-rappresentazione ($\mathcal{D}'_-$-rappresentazione) per traslazione di uscita (di entrata).