Teorema (11.5)

Per ogni σ-algebra $\mathcal{A}$ esiste un σ-campo $\mathfrak{F}$ ed un σ-ideale $\mathfrak{J}$ tale che $\mathcal{A}$ è isomorfa ad $\mathfrak{F}/\mathfrak{J}$.

Precisamente

Se X è lo spazio di Stone di $\mathcal{A}$, sia $\mathfrak{F}$ il più piccolo σ-campo contenente $\mathcal{A}^*$ (l'insieme dei clopen di X), $\mathfrak{J} = \{ B \in \mathfrak{F} : B$ di 1^a categoria$\}$ (è un σ-ideale). Allora $\mathcal{A}$ è isomorfa ad $\mathfrak{F}/\mathfrak{J}$ e precisamente se $h : \mathcal{A} \to \mathcal{A}^*$ è un isomorfismo surgettivo, allora

$$\tilde{h}(A) = [h(A)]_{\mathfrak{J}} \qquad \forall A \in \mathcal{A}$$

è un isomorfismo di $\mathcal{A}$ su $\mathfrak{F}/\mathfrak{J}$.
(Per la dim. cfr. [1] pag. 117).

Il teorema precedente non vale per $m > \aleph_0$.

§ 12 - Applicazioni alla teoria della misura.

Data una misura μ su un campo $\mathfrak{F}$ (cfr. §2 -c) non è sempre possibile estenderla ad una σ-misura μ' sul σ-campo $\mathfrak{F}'$ σ-generato da $\mathfrak{F}$ ($\mathfrak{F}'$ è il più piccolo σ-campo contenente $\mathfrak{F}$).

La condizione necessaria e sufficiente che permette tale estensione è la seguente:

(1) $\forall \{A_n ; n \in \mathbb{N}\} \subset \mathfrak{F}$ disgiunti, se $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{F}$ allora

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) .$$

Ricordato che se $\mathfrak{F}$ è un campo perfetto, ogni unione numerabile di elementi non vuoti e disgiunti di $\mathfrak{F}$, non appartiene ad $\mathfrak{F}$ (cfr. Prop. 15,§ 6), si ha:

Prop. (12.1). Ogni misura su un campo perfetto, può essere estesa ad una σ-misura.

D'altro canto ogni campo $\mathfrak{F}$ di sottoinsiemi di X è isomorfo ad un campo perfetto d'insiemi $\mathfrak{F}'$, ottenuto aggiungendo ad X qualche punto (cfr. § 7 Esempio 6). Se $h : \mathfrak{F} \to \mathfrak{F}'$ è l'isomorfismo (su) e si pone

(2) $$\mu'(h(A)) = \mu(A) \qquad \forall A \in \mathfrak{F}$$

allora μ' è una misura su $\mathfrak{F}'$ che verifica la (1) e quindi è una σ-misura.

In particolare si può considerare come $\mathfrak{F}'$ il campo $\mathfrak{F}^*$ dei clopen dello spazio di Stone $[\mathfrak{F}]$ di $\mathfrak{F}$ e in tal caso scriveremo in luogo della (2):

(2)' $$\mu^*(A^*) = \mu(A) \qquad \forall A \in \mathfrak{F} .$$

C'è un altro modo per ottenere μ' (σ-misura) da μ senza passare attraverso l'isomorfismo h, occorre però che μ sia finita.

Sia $\mathfrak{I} = \{A \in \mathfrak{F} : \mu(A) = 0\}$, consideriamo $\mathcal{A} = \mathfrak{F}/_{\mathfrak{I}}$ e definiamo

(3) $$\bar{\mu}([A]_{\mathfrak{I}}) = \mu(A) \qquad \forall A \in \mathfrak{F} .$$

$\bar{\mu}$ risulta una misura finita e strettamente positiva sull'algebra Booleana $\mathcal{A}$, ed induce una metrica su $\mathcal{A}$, ponendo

(4) $$\rho(A,B) = \bar{\mu}(A-B) + \bar{\mu}(B-A) = \bar{\mu}(A \triangle B) \qquad \forall A,B \in \mathcal{A} .$$

(A,ρ) è uno spazio metrico, in generale non completo.

Se chiamiano $\mathcal{A}'$ il completamento (Cantoriano) di $\mathcal{A}$, risulta $\bar{\mathcal{A}} = \mathcal{A}'$. Poiché risulta che (4)

(5) $$|\bar{\mu}(A) - \bar{\mu}(B)| \leq \rho(A,B)$$

la $\bar{\mu}$ è continua su $\mathcal{A}$ e quindi può essere estesa ad una funzione reale e continua $\bar{\mu}'$ su $\mathcal{A}'$. Estendendo le operazioni Booleane di $\mathcal{A}$ su $\mathcal{A}'$, $\mathcal{A}'$ diventa una σ-algebra Booleana ed $\bar{\mu}'$ è una σ-misura strettamente positiva su $\mathcal{A}'$, isomorfa alla μ' definita dalle (2), nel senso che $\exists\, h'$

isomorfismo di $\mathfrak{F}'$ su $\mathcal{A}'$ tale che

$$\mu'(A) = \bar{\mu}'\, h'(A) \qquad \forall A \in \mathfrak{F}'$$

Un'altra interessante applicazione è l'interpretazione delle funzioni misurabili nello spazio di Stone.

DEF. Sia $\mathfrak{F}$ un σ-campo di sottoinsiemi di X ed $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$.

Si dice che f è $\mathfrak{F}$-misurabile $\overset{\cdot}{\iff}$ $\forall a \in \mathbb{R} : \{x \in X : f(x) < a\} \in \mathfrak{F}$.
Nel seguito scriveremo semplicemente $\{f < a\}$ in luogo di $\{x \in X : f(x) < a\}$.
Molto spesso conviene identificare funzioni misurabili modulo un σ-ideale $\mathfrak{J}$ di $\mathfrak{F}$. Precisamente diremo che due funzioni f_1, f_2 $\mathfrak{F}$-misurabili sono $\mathfrak{J}$-equivalenti $\iff$ $\{x \in X : f_1(x) \neq f_2(x)\} \in \mathfrak{J}$ (Nella teoria della misura si identificano le funzioni misurabili, diverse solo su un insieme di misura nulla).

Denotiamo con $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(X, \mathcal{A})$ l'insieme delle funzioni reali $\mathcal{A}$-misurabili, dove $\mathcal{A}$ è un σ-campo di sottoinsiemi di X. Consideriamo lo spazio di Stone $[\mathcal{A}]$ di $\mathcal{A}$ e sia $h : \mathcal{A} \to \mathcal{A}^*$ l'isomorfismo introdotto nel Teorema 16 del § 7, di cui conserviamo le notazioni.

Se $f \in \mathfrak{M}$ allora per definizione

(6) $\forall a \in \mathbb{R} : \{f < a\} \in \mathcal{A}$.

Se $\beta \in [\mathcal{A}]$ allora $\forall a \in \mathbb{R}$, risultando $\{f < a\} \in \mathcal{A}$, deve essere $\{f < a\} \in \beta$ oppure $-\{f < a\} = \{f \geq a\} \in \beta$ il che porta che definito

$$(7) \qquad \begin{aligned} \mathbb{R}_1 &= \{a \in \mathbb{R} : \{f \geq a\} \in \beta\} \\ \mathbb{R}_2 &= \{a \in \mathbb{R} : \{f < a\} \in \beta\} \end{aligned}$$

risulta $(\mathbb{R}_1, \mathbb{R}_2)$ una partizione di $\mathbb{R}$. Osservato che

$a < b \implies \{f \geq b\} \subset \{f \geq a\} \qquad (b \in \mathbb{R}_1 \implies]-\infty, b] \subset \mathbb{R}_1)$

$a < b \implies \{f < a\} \subset \{f < b\} \qquad (a \in \mathbb{R}_2 \implies [a, +\infty[\subset \mathbb{R}_2)$

si ha che $(\mathbb{R}_1, \mathbb{R}_2)$ costituisce una coppia di insiemi separati e quindi contigui. Se chiamiamo con ℓ l'elemento separatore risulta

(8) $$\sup \mathbb{R}_1 = \ell = \inf \mathbb{R}_2 .$$

Orbene definiamo

(9) $$f^*(\beta) = \ell \qquad \forall \beta \in [\mathcal{A}] .$$

Ricordiamo che se φ è un filtro di $\mathcal{A}$ ed $f : X \to \mathbb{R}$ si definisce (cfr. ad esempio [2])

$$\min\lim_{\varphi} f = \sup_{A \in \varphi} \inf f(A) = \ell'$$

$$\max\lim_{\varphi} f = \inf_{A \in \varphi} \sup f(A) = \ell''$$

Risulta

(11) $$\inf f(X) \leq \ell' \leq \ell'' \leq \sup f(X)$$

se accade che $\ell' = \ell''$ allora si definisce

(12) $$\lim_{\varphi} f = \ell' = \ell''$$

Orbene proviamo che, con le notazioni introdotte, si ha

<u>Proposizione</u> (12.2)

(13) $$f^*(\beta) = \lim_{\beta} f \qquad \forall \beta \in [\mathcal{A}]$$

DIM .

Essendo $f^*(\beta)$ l'elemento separatore di $\mathbb{R}_1$ ed $\mathbb{R}_2$, fissato $\varepsilon > 0$

$$\exists\, a \in \mathbb{R}_1 \quad \exists\, b \in \mathbb{R}_2 \ni' \quad b - a < \varepsilon$$

Risulta $A = \{ f \geq a \} \in \beta$, $B = \{ f < b \} \in \beta$.

Pertanto $\exists\, A, B \in \beta \ni' \ a \leq \inf f(A)$ e $\sup f(B) \leq b$ e poi

$$\sup f(B) - \inf f(A) \leq b - a < \varepsilon$$

cvd

Ci proponiamo di provare che l'applicazione $f^* : [\mathcal{A}] \to \mathbb{R}$ è continua. A tal fine è utilissimo il seguente

<u>Lemma</u> (12.3)

$\forall a \in \mathbb{R}$ risulta

(14) $$\{f^* < a\} \subset \{f < a\}^* \subset \{f^* \leq a\}$$

$$\{f^* > a\} \subset \{f \geq a\}^* \subset \{f^* \geq a\}$$

(15) $$\{f^* < a\} = \bigcup_{b<a} \{f < b\}^* \ (= - \{f^* \geq a\})$$

$$\{f^* > a\} = \bigcup_{b>a} \{f \geq b\}^*$$

DIM.

$$\beta \in \{f^* < a\} \iff f^*(\beta) < a \implies a \in \mathbb{R}_2 \iff \{f<a\} \in \beta \iff \beta \in \{f<a\}^*$$

viceversa

$$\beta \in \{f < a\}^* \iff \{f < a\} \in \beta \iff a \in \mathbb{R}_2 \iff f^*(\beta) \leq a \iff \beta \in \{f^* \leq a\}$$

Per provare la (15) basta osservare che

$$f^*(\beta) < a \iff \exists\, b \ \ni' \ f^*(\beta) \leq b < a \iff \exists\, b < a \ \ni' \ b \in \mathbb{R}_2$$
$$\iff \exists\, b < a \ \ni' \{f < b\} \in \beta \iff \exists\, b < a \ \ni' \ \beta \in \{f < b\}^*$$

Analogamente si provano le altre.

cvd

<u>Proposizione</u> (12.4)

f^* definita dalla (13) se $f \in \mathcal{M}$, è continua .

DIM.

Basta fare vedere che $f^{*-1}(]a,b[)$ è un aperto $\forall a,b \in \mathbb{R}$ con $a < b$.

$f^{*-1}(]a,b[) = \{f^* > a\} \cap \{f^* < b\}$, quindi per la (15) del Lemma (12.3), poiché per ogni $C \in \mathbb{R}$ risulta $\{f < c\}, \{f \geq c\} \in \mathcal{A}$ e quindi $\{f \geq c\}^*$ e $\{f < c\}^*$ sono i clopen $(\in \mathcal{A}^*)$ di $[\mathcal{A}]$, risulta $\{f^* < b\}$ un aperto di $[\mathcal{A}]$ e lo stesso vale per $\{f^* > a\}$ (si ricordi che $\mathcal{A}^*$ è base per la topologia su $[\mathcal{A}]$ cfr. osserv.5 § 7).

cvd

Denotiamo con $C([\mathcal{A}])$ l'insieme delle funzioni reali continue su $[\mathcal{A}]$. L'isomorfismo h di $\mathcal{A}$ su $\mathcal{A}^*$, come si è visto induce l'applicazione $h_1 : \mathcal{M}(X,\mathcal{A}) \to C([\mathcal{A}])$ ∋' $h_1(f) = f^*$.

Osserviamo che $\forall x \in X$ risulta

(16) $$f^*(\beta_x) = f(x) .$$

Infatti detto $l = \lim\limits_{\beta_x} f$, per definizione

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists A \in \beta_x$ ∋' $\forall y \in A : |f(y) - l| < \varepsilon$.

Poiché $x \in A \quad \forall A \in \beta_x$ deve rsiultare $|f(x) - l| < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$ e quindi $f(x) = l$.

Dalla (16) segue subito che

PROPOSIZIONE (12.5)

h_1 è una bigezione la cui inversa $h_1^{-1} : C([\mathcal{A}]) \to \mathcal{M}$, $g \to \tilde{g}$ è definita da $\tilde{g}(x) = g(\beta_x) \quad \forall x \in X$.

DIM

La h_1 è ingettiva in quanto se $f^* = g^*$ deve anche essere $f^*(\beta_x) = g^*(\beta_x)$ $\forall x \in X$, cioé $f = g$ per la (16).

La h_1 è surgettiva, infatti se $g \in C([\mathcal{A}])$, posto $\tilde{g}(x) = g(\beta_x) \quad \forall x \in X$, si prova che $\tilde{g} : X \to \mathbb{R}$ è misurabile. A tale scopo proviamo a parte il seguente

Lemma (12.6)

$\forall a,b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ $\exists A \in \mathcal{A}$ tale che

(17) $$\{\tilde{g} \geq b\} \subset A \subset \{\tilde{g} > a\}$$

DIM.

Se $\tilde{g}(x) \geq b > a$ allora $g(\beta_x) \geq b > a \Rightarrow \beta_x \in \{g \geq b\} \subset \{g > a\}$.

Essendo g continua risulta $\{g \geq b\}$ chiuso e $\{g > a\}$ aperto in $[\mathcal{A}]$ e quindi (cfr. Teorema 16 §7 e Teorema 13 §6) $\exists \{A_i;\ i \in I\} \subset \mathcal{A}$ $\ni'$

$$\{g \geq b\} \subset \{g > a\} = \bigcup_{i \in I} A_i^* .$$

Per la compatezza di $[\mathcal{A}]$ e quindi di $\{g \geq b\}$ $\exists J$ finito $\subset$ I tale che

$$\{g \geq b\} \subset \bigcup_{i \in J} A_i^* \subset \{g > a\} .$$

Risulta, posto $A = \bigcup_{i \in J} A_i$, $A \in \mathcal{A}$ e

$$\{g \geq b\} \subset A^* \subset \{g > a\} .$$

Da qui segue la (17) infatti

$$\tilde{g}(x) \geq b \Longrightarrow \beta_x \in \{g \geq b\} \Longrightarrow \beta_x \in A^* \Longrightarrow A \in \beta_x \Longrightarrow x \in A ;$$

$$x \in A \Longrightarrow A \in \beta_x \Longrightarrow \beta_x \in A^* \Longrightarrow g(\beta_x) > a \Longrightarrow \tilde{g}(x) > a.$$

cvd

Continuazione della dim. della Prop. (12.5)

Dal Lemma (12.6) segue che $\forall a \in \mathbb{R}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $\exists A_n \in \mathcal{A}$ $\ni'$

$$\{\tilde{g} \geq a + \frac{1}{n}\} \subset A_n \subset \{\tilde{g} > a\}$$

e poiché $\bigcup_{n=1}^{\infty} \{\tilde{g} \geq a + \frac{1}{n}\} = \{\tilde{g} > a\}$ segue che $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \{\tilde{g} > a\}$ il che prova : $\{\tilde{g} < a\} \in \mathcal{A}$.

cvd

Corollario (12.7)

$\forall g \in C([\mathcal{A}])$ risulta $\overline{\tilde{g}(X)} = g([\mathcal{A}])$ che è un compatto.

DIM.

Essendo $[\mathcal{A}]$ compatto, tale è anche $g([\mathcal{A}])$. Ricordato che $\{\beta_x ; x \in X\}$ è denso in $[\mathcal{A}]$ segue

$$\overline{\tilde{g}(X)} = \overline{\{g(\beta_x); x \in X\}} = g([\mathcal{A}])$$

cvd

(Si ricordi che per le funzioni continue $g(\bar{A}) \subset \overline{g(A)}$)

Osservazione (12.1)

Da quanto detto segue che la funzione $f : X \;\; \overline{\mathbb{R}}$ $\mathcal{A}$-misurabile (dove $\mathcal{A}$ è una σ-algebra) corrispondono (mediante una bigezione) alle funzioni $f^* : [\mathcal{A}] \to \overline{\mathbb{R}}$ continue. Poiché se si considerano $f^* : [\mathcal{A}] \to \overline{\mathbb{R}}$ allora $f^*([\mathcal{A}])$ è limitato, per quanto detto nel Corollario (12.7) si ha che queste funzioni corrispondono (nella bigezione precedente) alle funzioni $\mathcal{A}$-misurabili e limitate.

Osservazione (12.2)

Nel caso in cui $\mathcal{A}$ è solo un'algebrae non una σ-algebra, allora la definizione di funzione $\mathcal{A}$-misurabile data, non è più soddisfacente. In topologia non è più vero che:

(18) $(\forall a \in \mathbb{R} : \{f < a\} \in \mathcal{A}) \iff (\forall B$ Boreliano di $\mathbb{R} : f^{-1}(B) \in \mathcal{A})$.

Anche se si dà come definizione la proposizione a destra della (18), non si registra un notevole miglioramento. In particolare la classe delle funzioni $\mathcal{A}$-misurabili potrebbe essere molto esigua, come mostrano i seguenti esempi.

ESEMPIO (12.1). Sia X un insieme infinito ed $\mathcal{A}$ l'algebra dei suoi sottoinsiemi finiti o cofiniti. Orbene se si usa la definizione

$f : X \to \mathbb{R}$ $\mathcal{A}$-misurabile $\iff$ $\forall B$ Boreliano di $\mathbb{R} : f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ si ottiene che

$$f \in \mathcal{M} \implies f(X) \quad \text{è finito} \quad .$$

Infatti supposto $f \in \mathcal{M}$, se per assurdo il codominio $f(X)$ è infinito, allora possiamo trovare due suoi sottoinsiemi numerabili e disgiunti A e B. Poiché A e B sono Boreliani (perché numerabili) di $\mathbb{R}$, deve essere $f^{-1}(A)$, $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$. Necessariamente $f^{-1}(A)$ e $f^{-1}(B)$ sono cofiniti, ma ciò è assurdo in quanto da $A \subset \mathbb{R}-B$ segue che $f^{-1}(A) \subset - f^{-1}(B)$ (il 1° è infinito, mentre il 2° è finito).

ESEMPIO (12.2). Sia $X = \mathbb{R}$ e sia $\mathcal{A}$ l'algebra generata dagli intervalli di $\mathbb{R}$ limitati o non, cioé

$$A \in \mathcal{A} \iff A = \bigcup_{k=1}^{n} I_k \quad \text{con } I_h \cap I_k = \emptyset \text{ e } I_k \text{ intervallo di } \mathbb{R}$$

(è l'algebra dei plurintervalli finiti di $\mathbb{R}$). Orbene si prova che

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \mathcal{A}\text{-misurabile} \implies f(\mathbb{R}) \text{ è al più numerabile.}$$

Osservazione (12.3)

Se (X,τ) è uno spazio topologico, qual'è la più piccola σ-algebra $\mathcal{A}$ che rende $\mathcal{A}$-misurabili tutte le funzioni reali continue, cioé tale che

$$(19) \qquad C(X;\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}(X,\mathcal{A}) ? \; .$$

Poiché se $f : X \to \mathbb{R}$ è continua, $\forall A$ aperto di $\mathbb{R}$ e $\forall C$ chiuso di $\mathbb{R}$, risulta $f^{-1}(A)$ aperto di X ed $f^{-1}(C)$ chiuso di X, sicuramente la σ-algebra $\mathcal{B}$ di Borel (di X) verifica la (19), ma non è la più piccola possibile.

La σ-algebra in oggetto è quella generata dai clopen di X e prende il nome di σ-algebra degli insiemi di Baire.

Se la denotiamo con $\mathcal{B}_o$ risulta $\mathcal{B}_o \subset B$.

Osservazione (12.4)

Le considerazioni precedenti suggeriscono di definire le funzioni reali $\mathcal{A}$-misurabili, nel caso in cui $\mathcal{A}$ sia solo un'algebra, come le funzioni corrispon denti a $C([\mathcal{A}])$ mediante l'applicazione definita da

$$\tilde{g}(x) = g(\beta_x) \qquad \forall x \in X \qquad \forall g \in C([\mathcal{A}]) \quad .$$

In tal caso tali funzioni godono delle proprietà (17) del Lemma (12.6). Viceversa se $f : X \to \mathbb{R}$ è una funzione che verifica la (17) si può provare che $\forall \beta \in [\mathcal{A}] \quad \exists \lim_{\beta} f$ e posto $f^*(\beta) = \lim_{\beta} f$ risulta $f^* \in C([\mathcal{A}])$.

Pertanto la (17) può essere assunta come definizione di funzione $\mathcal{A}$-misurabile.

In [8] G. Greco dà una definizione ancora più generale e precisamente, se $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ e $\emptyset \in \mathcal{A}$, si dice che

$$f : X \to \bar{\mathbb{R}} \quad \text{è } \mathcal{A}\text{-misurabile} \quad \overset{\cdot}{\Longleftrightarrow} \quad \forall a,b \in \mathbb{R} \quad \text{con} \quad b > a \quad \exists A \in \mathcal{A} \quad \ni'$$

$$\{f \geq b\} \subset A \subset \{f > a\} \; .$$

Non si richiede cioé neanche che $\mathcal{A}$ sia un'algebra.

Denotato con $\mathcal{M}^+ = \mathcal{M}^+(X,\mathcal{A}) \cap [0,+\infty]^X$ sempre in [8] si prova il seguente teorema.

<u>Teorema</u> (12.8)

1) $f \in \mathcal{M}^+$ e $a \in [0,+\infty) \Longrightarrow a \cdot f, \; f \wedge a, \; (f \vee a) - a \in \mathcal{M}^+$

2) $f \in \mathcal{M}^+$, $\psi : [0,+\infty] \to [0,+\infty]$ è cont. e crescente e $\psi(0) = 0 \Longrightarrow \psi \circ f \in \mathcal{M}^+$

3) $f_n \in \mathcal{M}^+$ e $f_n \xrightarrow{n} f$ uniformemente $\Longrightarrow f \in \mathcal{M}^+$.

4) Se $\mathcal{A}$ è un'algebra (o più semplicemente un anello) allora

$$f,g \in \mathcal{M}^+ \Longrightarrow f \wedge g, \; f \vee g, \; f + g, \; f \cdot g \in \mathcal{M}^+$$

5) Se $\mathcal{A}$ è una σ-algebra allora

$$f \; \mathcal{A}\text{-misurabile} \Longleftrightarrow \forall a \in \mathbb{R} : \{f < a\} \in \mathcal{A}$$

<u>Osservazione</u> (12.5) Se $\mathcal{A}$ è solo un'algebra ed $f,g \in \mathcal{M}$ non è affatto detto che sia $f + g \in \mathcal{M}$. Infatti se ad esempio $\mathcal{A} = \{A \subset \mathbb{N};\ A \text{ finito o cofinito}\}$

dire che $f : \mathbb{N}\ \overline{\mathbb{R}}$ sia $\mathcal{A}$-misurabile, equivale a dire che $\exists \lim_n f(n) \in \overline{\mathbb{R}}$ pertanto nel caso in cui $\lim_n f(n)=+\infty$ e $\lim_n g(n)=-\infty$ risultano $f,g \in \mathfrak{M}$ ma non è affatto detto che sia $f+g \in \mathfrak{M}$. Se $\mathcal{A}$ è invece una σ-algebra allora $\mathfrak{M}$ è chiusa rispetto alla somma.

Un particolare tipo di funzioni $\mathcal{A}$ misurabili sono le funzioni $\mathcal{A}$-semplici $S = S(X,\mathcal{A})$ che sono combinazioni lineari di funzioni caratteristiche φ_A con $A \in \mathcal{A}$. Orbene in [8] si prova che ogni funzione $\mathcal{A}$-misurabile è il limite uniforme di funzioni $\mathcal{A}$-semplici.

In altre parole introdotta su $\mathfrak{M}$ la metrica (della converg.-uniforme)

$$d(f,g) = \sup\{|\operatorname{arctg} f(x) - \operatorname{arctang} (x)| : x \in \mathbb{R}\}$$

$(\mathfrak{M},d)$ diventa uno spazio metrico ed $\bar{S} = \mathfrak{M}$.

Denotato con $\mathfrak{M}_b$ l'insieme delle funzioni $\mathcal{A}$-misurabili e limitate, quest'insieme è invece un'algebra di funzioni isomorfe all'algebra delle funzioni continue e limitate definite sullo spazio di Stone $[\mathcal{A}]$ associato ad $\mathcal{A}$ (cfr. Oss. (12.1) (12.4). e [8]).

Tra le tante conseguenze del teorema di rappresentazione di Stone, segnaliamo la seguente proposizione che dà utili informazioni sul codominio di una misura.

<u>Proposizione</u> (12.9) Se μ è una misura sull'algebra $\mathcal{A}$ allora detto $R_\mu = \{\mu(A) : A \in \mathcal{A}\}$, risulta che $\overline{R_\mu}$ è il codominio di una σ-misura su una σ-algebra.

DIM.

Definita $\mu^*(A^*) = \mu(A)$ $\forall A \in \mathcal{A}$, per quanto visto μ^* è una σ-misura sull'algebra $\mathcal{A}^*$ (dei clopen di $[\mathcal{A}]$).

Denotata con $\mathcal{A}^*_\sigma$ la σ-algebra generata da $\mathcal{A}^*$, μ^* può essere esteso ad una σ-misura $\tilde{\mu}$ su $\mathcal{A}^*_\sigma$. Risulta $R_{\tilde{\mu}}$ chiuso (questo è un risultato valido per le σ-misure su σ-algebre, cfr. [9]) e da $R_{\mu^*} \subset R_{\tilde{\mu}}$ segue che

$\overline{R}_{\mu^*} \subset R_{\tilde{\mu}}$. Viceversa se $a \subset R_{\tilde{\mu}}$ $\exists A \in \mathcal{A}_\sigma^*$ tale che $\tilde{\mu}(A) = a$. Ma $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ con $A_n \in \mathcal{A}^*$ opportune e disgiunte e quindi $a = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\mu}(A_n) =$

$= \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n) = \lim_n \sum_{k=1}^{m} \mu^*(A_k)$, cioé $\overline{R}_{\mu^*} = R_{\tilde{\mu}}$.

L'asserto ora segue dal fatto che $R_{\mu} = R_{\mu^*}$ cvd.

Osservazione (12.6) . In [10] si dà un'altra definizione di funzioni misurabili. Se μ è una misura sull'algebra $\mathcal{A}$ di parti di X, si definisce $\mu_e : \mathcal{P}(X) \to \mathbb{R}$ ponendo

$$\mu_e(A) = \inf\{\mu(B);\ B \supset A \quad \text{e} \quad B \in \mathcal{A}\}$$

e se $f_n, f \in \overline{\mathbb{R}}^X$ si dice che $f_n \xrightarrow[\mu]{} f$ se e solo se

$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \lim_n \mu_e\{|f_n - f| > \varepsilon\} = 0$.

Se $S = S(X,\mathcal{A})$ è al solito l'insieme delle funzioni semplici, si dice che f è $(\mathcal{A},\mu)$-misurabile se e solo se $\exists\, \{s_n;\ n \in \mathbb{N}\} \subset S$ tale che $s_n \xrightarrow[\mu]{} f$.

Questa definizione è ben diversa da quella data precedentemente, in quanto qui interviene anche la misura μ ; è pertanto arduo legare in generale le due definizioni.

Riportiamo qui alcuni esempi tratti da [11], che illustrano la differenza delle due definizioni. Denoteremo con $\mathcal{M}_D$ l'insieme delle funzioni $(\mathcal{A},\mu)$-misurabili.

Esempio 1. Sia $\mathcal{A}$ l'algebra generata dagli intervalli contenuti in $[0,1]$. Le funzioni $\mathcal{A}$-misurabili sono tutte le funzioni $f : [0,1] \to \overline{\mathbb{R}}$ tali che i seguenti limiti esistono in $\mathbb{R}$:

$$\lim_{x \to 1-} f(x)\ , \quad \lim_{x \to 0+} f(x)\ , \quad \lim_{x \to y+} f(x), \quad \lim_{x \to y-} f(x) \qquad \forall y \in\,]0,1[\ .$$

Se μ è la misura di Peano-Jordan su $\mathcal{A}$ una funzione f limitata è $(\mathcal{A},\mu)$-misurabile se e solo se è integrabile secondo Riemann.

Esempio 2.

Se $\mathcal{A} = \{A \subseteq \mathbb{N}$; A finito o cofinito$\}$ ed $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ risulta

$$f \in \mathcal{M} \iff \exists \lim_{n} f(n) \in \mathbb{R} .$$

Se $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to [0,1]$ è la misura definita da $\mu(A) = \sum_{n \in A} \frac{1}{2^n}$ per ogni $A \subseteq \mathbb{N}$, risulta $\mathcal{M}_D = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ cioé $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}_D$.

Citiamo il seguente risultato (cfr. [11]).

Proposizione (12.10) Se μ è una misura sull'algebra $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ risulta $\bar{\mathcal{A}} = \{H \subseteq X : \forall \varepsilon > 0 \ \exists A,B \in \mathcal{A}$ con $A \subset H \subset B$ e $\mu(B-A) < \varepsilon \}$ un'algebra contenente A.

Si ha

$$f : X \to \mathbb{R} \text{ è } (\mathcal{A},\mu) \text{ misurabile} \iff f \text{ è } \bar{\mathcal{A}}\text{-misurabile e}$$

$$\lim_{n \to +\infty} \mu_e \{ |f| > n \} = 0 .$$