Teorema (11.5)

Per ogni $\sigma$-algebra $\mathcal{A}$ esiste un $\sigma$-campo $\mathfrak{F}$ ed un $\sigma$-ideale $\mathfrak{I}$ tale che $\mathcal{A}$ è isomorfa ad $\mathfrak{F}/\mathfrak{I}$.

Precisamente

Se $X$ è lo spazio di Stone di $\mathcal{A}$, sia $\mathfrak{F}$ il più piccolo $\sigma$-campo contenente $\mathcal{A}^*$ (l'insieme dei clopen di $X$), $\mathfrak{I} = \{ B \in \mathfrak{F} : B$ di $1^a$ categoria$\}$ (è un $\sigma$-ideale). Allora $\mathcal{A}$ è isomorfa ad $\mathfrak{F}/\mathfrak{I}$ e precisamente se $h : \mathcal{A} \to \mathcal{A}^*$ è un isomorfismo surgettivo, allora

$$\tilde{h}(A) = [h(A)]_{\mathfrak{I}} \qquad \forall A \in \mathcal{A}$$

è un isomorfismo di $\mathcal{A}$ su $\mathfrak{F}/\mathfrak{I}$.
(Per la dim. cfr. [1] pag. 117).

Il teorema precedente non vale per $m > \aleph_0$.

## § 12 - Applicazioni alla teoria della misura.

Data una misura $\mu$ su un campo $\mathfrak{F}$ (cfr. §2 -c) non è sempre possibile estenderla ad una $\sigma$-misura $\mu'$ sul $\sigma$-campo $\mathfrak{F}'$ $\sigma$-generato da $\mathfrak{F}$ ($\mathfrak{F}'$ è il più piccolo $\sigma$-campo contenente $\mathfrak{F}$).

La condizione necessaria e sufficiente che permette tale estensione è la seguente:

(1) $\forall \{A_n ; n \in \mathbb{N}\} \subset \mathfrak{F}$ disgiunti, se $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{F}$ allora

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) .$$

Ricordato che se $\mathfrak{F}$ è un campo perfetto, ogni unione numerabile di elementi non vuoti e disgiunti di $\mathfrak{F}$, non appartiene ad $\mathfrak{F}$ (cfr. Prop. 15,§ 6), si ha:

Prop. (12.1). Ogni misura su un campo perfetto, può essere estesa ad una $\sigma$-misura.

si ha che $(\mathbb{R}_1, \mathbb{R}_2)$ costituisce una coppia di insiemi separati e quindi contigui. Se chiamiamo con $\ell$ l'elemento separatore risulta

$$\sup \mathbb{R}_1 = \ell = \inf \mathbb{R}_2 . \tag{8}$$

Orbene definiamo

$$f^*(\beta) = \ell \qquad \forall\, \beta \in [\mathcal{A}] . \tag{9}$$

Ricordiamo che se $\varphi$ è un filtro di $\mathcal{A}$ ed $f : X \to \mathbb{R}$ si definisce (cfr. ad esempio [2])

$$\operatorname{minlim}_{\varphi} f = \sup_{A\in\varphi} \inf f(A) = \ell'$$

$$\operatorname{maxlim}_{\varphi} f = \inf_{A\in\varphi} \sup f(A) = \ell''$$

Risulta

$$\inf f(X) \leq \ell' \leq \ell'' \leq \sup f(X) \tag{11}$$

se accade che $\ell' = \ell''$ allora si definisce

$$\lim_{\varphi} f = \ell' = \ell'' \tag{12}$$

Orbene proviamo che, con le notazioni introdotte, si ha

<u>Proposizione</u> (12.2)

$$f^*(\beta) = \lim_{\beta} f \qquad \forall\, \beta \in [\mathcal{A}] \tag{13}$$

DIM .

Essendo $f^*(\beta)$ l'elemento separatore di $\mathbb{R}_1$ ed $\mathbb{R}_2$, fissato $\varepsilon > 0$

$$\exists\, a \in \mathbb{R}_1 \quad \exists\, b \in \mathbb{R}_2 \ni' \quad b - a < \varepsilon$$

Risulta $A = \{ f \geq a \} \in \beta$ , $B = \{ f < b \} \in \beta$ .

Pertanto $\exists\, A, B \in \beta \ni'$ $a \leq \inf f(A)$ e $\sup f(B) \leq b$ e poi

$$\sup f(B) - \inf f(A) \leq b - a < \varepsilon$$

cvd

Ci proponiamo di provare che l'applicazione $f^{*} : [\mathcal{A}] \to \mathbb{R}$ è continua. A tal fine è utilissimo il seguente

Lemma (12.3)

$\forall a \in \mathbb{R}$ risulta

$$(14) \qquad \{f^{*} < a\} \subset \{f < a\}^{*} \subset \{f^{*} \leq a\}$$

$$\{f^{*} > a\} \subset \{f \geq a\}^{*} \subset \{f^{*} \geq a\}$$

$$(15) \qquad \{f^{*} < a\} = \bigcup_{b<a} \{f < b\}^{*} \quad (= -\{f^{*} \geq a\})$$

$$\{f^{*} > a\} = \bigcup_{b>a} \{f \geq b\}^{*}$$

DIM.

$$\beta \in \{f^{*} < a\} \iff f^{*}(\beta) < a \implies a \in \mathbb{R}_2 \iff \{f<a\} \in \beta \iff \beta \in \{f<a\}^{*}$$

viceversa

$$\beta \in \{f < a\}^{*} \iff \{f < a\} \in \beta \iff a \in \mathbb{R}_2 \iff f^{*}(\beta) \leq a \iff \beta \in \{f^{*} \leq a\}$$

Per provare la (15) basta osservare che

$$f^{*}(\beta) < a \iff \exists\, b \ni' f^{*}(\beta) \leq b < a \iff \exists\, b < a \ni' b \in \mathbb{R}_2$$
$$\iff \exists\, b < a \ni' \{f < b\} \in \beta \iff \exists\, b < a \ni' \beta \in \{f < b\}^{*}$$

Analogamente si provano le altre.

cvd

Proposizione (12.4)

$f^{*}$ definita dalla (13) se $f \in \mathcal{M}$, è continua.

DIM.

Basta fare vedere che $f^{*-1}(]a,b[)$ è un aperto $\forall a,b \in \mathbb{R}$ con $a < b$.

$f^{*-1}(]a,b[) = \{ f^* > a \} \cap \{ f^* < b \}$ , quindi per la (15) del Lemma (12.3); poiché per ogni $C \in \mathbb{R}$ risulta $\{ f < c \}, \{ f \geq c \} \in \mathcal{A}$ e quindi $\{ f \geq c \}^*$ e $\{ f < c \}^*$ sono i clopen $(\in \mathcal{A}^*)$ di $[\mathcal{A}]$, risulta $\{ f^* < b \}$ un aperto di $[\mathcal{A}]$ e lo stesso vale per $\{ f^* > a \}$ (si ricordi che $\mathcal{A}^*$ è base per la topologia su $[\mathcal{A}]$ cfr. osserv.5 § 7).

cvd

Denotiamo con $C([\mathcal{A}])$ l'insieme delle funzioni reali continue su $[\mathcal{A}]$.
L'isomorfismo $h$ di $\mathcal{A}$ su $\mathcal{A}^*$, come si è visto induce l'applicazione $h_1 : \mathcal{M}(X,\mathcal{A}) \to C([\mathcal{A}])$ $\ni'$ $h_1(f) = f^*$ .

Osserviamo che $\forall x \in X$ risulta

(16) $$f^*(\beta_x) = f(x) .$$

Infatti detto $l = \lim_{\beta_x} f$, per definizione

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists A \in \beta_x \quad \ni' \quad \forall y \in A : |f(y) - l| < \varepsilon$ .

Poiché $x \in A$ $\forall A \in \beta_x$ deve rsiultare $|f(x) - l| < \varepsilon$ $\forall \varepsilon > 0$ e quindi $f(x) = l$.

Dalla (16) segue subito che

<u>PROPOSIZIONE</u> (12.5)

$h_1$ è una bigezione la cui inversa $h_1^{-1} : C([\mathcal{A}]) \to \mathcal{M}$, $g \to \tilde{g}$ è definita da $\tilde{g}(x) = g(\beta_x)$ $\forall x \in X$ .

DIM

La $h_1$ è ingettiva in quanto se $f^* = g^*$ deve anche essere $f^*(\beta_x) = g^*(\beta_x)$ $\forall x \in X$ , cioé $f = g$ per la (16).

La $h_1$ è surgettiva, infatti se $g \in C([\mathcal{A}])$, posto $\tilde{g}(x) = g(\beta_x)$ $\forall x \in X$, si prova che $\tilde{g} : X \to \mathbb{R}$ è misurabile. A tale scopo proviamo a parte il seguente

Lemma (12.6)

$\forall a,b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ $\exists\, A \in \mathcal{A}$ tale che

(17) $$\{ \tilde{g} \geq b \} \subset A \subset \{ \tilde{g} > a \}$$

DIM.

Se $\tilde{g}(x) \geq b > a$ allora $g(\beta_x) \geq b > a \Rightarrow \beta_x \in \{ g \geq b \} \subset \{ g > a \}$ .

Essendo $g$ continua risulta $\{ g \geq b \}$ chiuso e $\{ g > a \}$ aperto in $[\mathcal{A}]$ e quindi (cfr. Teorema 16 §7 e Teorema 13 §6) $\exists \{ A_i ; i \in I \} \subset \mathcal{A}$ $\ni'$

$$\{ g \geq b \} \subset \{ g > a \} = \bigcup_{i \in I} A_i^* .$$

Per la compatezza di $[\mathcal{A}]$ e quindi di $\{ g \geq b \}$ $\exists\, J$ finito $\subset$ $I$ tale che

$$\{ g \geq b \} \subset \bigcup_{i \in J} A_i^* \subset \{ g > a \} .$$

Risulta, posto $A = \bigcup_{i \in J} A_i$ , $A \in \mathcal{A}$ e

$$\{ g \geq b \} \subset A^* \subset \{ g > a \} .$$

Da qui segue la (17) infatti

$$\tilde{g}(x) \geq b \Longrightarrow \beta_x \in \{ g \geq b \} \Longrightarrow \beta \in A^* \Longrightarrow A \in \beta_x \Longrightarrow x \in A ;$$

$$x \in A \Longrightarrow A \in \beta_x \Longrightarrow \beta_x \in A^* \Longrightarrow g(\beta_x) > a \Longrightarrow \tilde{g}(x) > a .$$

cvd

Continuazione della dim. della Prop. (12.5)

Dal Lemma (12.6) segue che $\forall a \in \mathbb{R}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $\exists\, A_n \in \mathcal{A}$ $\ni'$

$$\{ \tilde{g} \geq a + \frac{1}{n} \} \subset A_n \subset \{ \tilde{g} > a \}$$

e poiché $\bigcup_{n=1}^{\infty} \{ \tilde{g} \geq a + \frac{1}{n} \} = \{ \tilde{g} > a \}$ segue che $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \{ \tilde{g} > a \}$ il che prova : $\{ \tilde{g} < a \} \in \mathcal{A}$ .

cvd

Corollario (12.7)

$\forall g \in C([\mathcal{A}])$ risulta $\overline{\tilde{g}(X)} = g([\mathcal{A}])$ che è un compatto.

DIM.

Essendo $[\mathcal{A}]$ compatto, tale è anche $g([\mathcal{A}])$. Ricordato che $\{\beta_x ; x \in X\}$ è denso in $[\mathcal{A}]$ segue

$$\overline{\tilde{g}(X)} = \overline{\{g(\beta_x); x \in X\}} = g([\mathcal{A}])$$

cvd

(Si ricordi che per le funzioni continue $g(\bar{A}) \subset \overline{g(A)}$)

Osservazione (12.1)

Da quanto detto segue che la funzione $f : X \quad \overline{\mathbb{R}}$ $\mathcal{A}$-misurabili (dove $\mathcal{A}$ è una $\sigma$-algebra) corrispondono (mediante una bigezione) alle funzioni $f^* : [\mathcal{A}] \to \overline{\mathbb{R}}$ continue. Poiché se si considerano $f^* : [\mathcal{A}] \to \overline{\mathbb{R}}$ allora $f^*([\mathcal{A}])$ è limitato, per quanto detto nel Corollario (12.7) si ha che queste funzioni corrispondono (nella bigezione precedente) alle funzioni $\mathcal{A}$-misurabili e limitate.

Osservazione (12.2)

Nel caso in cui $\mathcal{A}$ è solo un'algebrae non una $\sigma$-algebra, allora la definizione di funzione $\mathcal{A}$-misurabile data, non è più soddisfacente. In topologia non è più vero che:

(18) $(\forall a \in \mathbb{R} : \{f < a\} \in \mathcal{A}) \iff (\forall B$ Boreliano di $\mathbb{R} : f^{-1}(B) \in \mathcal{A})$.

Anche se si dà come definizione la proposizione a destra della (18), non si registra un notevole miglioramento. In particolare la classe delle funzioni $\mathcal{A}$-misurabili potrebbe essere molto esigua, come mostrano i seguenti esempi.

ESEMPIO (12.1). Sia $X$ un insieme infinito ed $\mathcal{A}$ l'algebra dei suoi sottoinsiemi finiti o cofiniti. Orbene se si usa la definizione

$f : X \to \mathbb{R}$ $\mathcal{A}$-misurabile $\iff$ $\forall B$ Boreliano di $\mathbb{R} : f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ si ottiene che

$$f \in \mathcal{M} \implies f(X) \quad \text{è finito} \quad .$$

Infatti supposto $f \in \mathcal{M}$, se per assurdo il codominio $f(X)$ è infinito, allora possiamo trovare due suoi sottoinsiemi numerabili e disgiunti $A$ e $B$. Poiché $A$ e $B$ sono Boreliani (perché numerabili) di $\mathbb{R}$, deve essere $f^{-1}(A)$, $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$. Necessariamente $f^{-1}(A)$ e $f^{-1}(B)$ sono cofiniti, ma ciò è assurdo in quanto da $A \subset \mathbb{R}-B$ segue che $f^{-1}(A) \subset - f^{-1}(B)$ (il 1° è infinito, mentre il 2° è finito).

<u>ESEMPIO</u> (12.2). Sia $X = \mathbb{R}$ e sia $\mathcal{A}$ l'algebra generata dagli intervalli di $\mathbb{R}$ limitati o non, cioé

$$A \in \mathcal{A} \iff A = \bigcup_{k=1}^{n} I_k \quad \text{con } I_h \cap I_k = \emptyset \text{ e } I_k \text{ intervallo di } \mathbb{R}$$

(è l'algebra dei plurintervalli finiti di $\mathbb{R}$). Orbene si prova che

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \mathcal{A}\text{-misurabile} \implies f(\mathbb{R}) \text{ è al più numerabile.}$$

<u>Osservazione</u> (12.3)

Se $(X,\mathcal{T})$ è uno spazio topologico, qual'è la più piccola $\sigma$-algebra $\mathcal{A}$ che rende $\mathcal{A}$-misurabili tutte le funzioni reali continue, cioé tale che

$$(19) \qquad C(X;\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}(X,\mathcal{A}) \,? \,.$$

Poiché se $f : X \quad \mathbb{R}$ è continua, $\forall A$ aperto di $\mathbb{R}$ e $\forall C$ chiuso di $\mathbb{R}$, risulta $f^{-1}(A)$ aperto di $X$ ed $f^{-1}(C)$ chiuso di $X$, sicuramente la $\sigma$-algebra $\mathcal{B}$ di Borel (di $X$) verifica la (19), ma non è la più piccola possibile.

La $\sigma$-algebra in oggetto è quella generata dai clopen di $X$ e prende il nome di <u>$\sigma$-algebra degli insiemi di Baire.</u>

Se la denotiamo con $\mathcal{B}_0$ risulta $\mathcal{B}_0 \subset B$.

<u>Osservazione</u> (12.4)

Le considerazioni precedenti suggeriscono di definire le funzioni reali $\mathcal{A}$-misurabili, nel caso in cui $\mathcal{A}$ sia solo un'algebra, come le funzioni corrispon denti a $C([\mathcal{A}])$ mediante l'applicazione definita da

$$\tilde{g}(x) = g(\beta_x) \qquad \forall x \in X \qquad \forall g \in C([\mathcal{A}]) \quad .$$

In tal caso tali funzioni godono delle proprietà (17) del Lemma (12.6). Viceversa se $f : X \to \mathbb{R}$ è una funzione che verifica la (17) si può provare che $\forall \beta \in [\mathcal{A}] \quad \exists \lim_{\beta} f$ e posto $f^*(\beta) = \lim_{\beta} f$ risulta $f^* \in C([\mathcal{A}])$.

Pertanto la (17) può essere assunta come definizione di funzione $\mathcal{A}$-misurabile.

In [8] G. Greco dà una definizione ancora più generale e precisamente, se $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ e $\emptyset \in \mathcal{A}$, si dice che

$$f : X \to \bar{\mathbb{R}} \quad \text{è } \mathcal{A}\text{-misurabile} \quad \stackrel{\cdot}{\Longleftrightarrow} \quad \forall a,b \in \mathbb{R} \text{ con } b > a \ \exists A \in \mathcal{A} \ \ni'$$

$$\{f \geq b\} \subset A \subset \{f > a\} .$$

Non si richiede cioé neanche che $\mathcal{A}$ sia un'algebra.

Denotato con $\mathfrak{M}^+ = \mathfrak{M}^+(X,\mathcal{A}) \cap [0,+\infty]^X$ sempre in [8] si prova il seguente teorema.

Teorema (12.8)

1) $f \in \mathfrak{M}^+$ e $a \in [0,+\infty) \Longrightarrow a \cdot f, \ f \wedge a, \ (f \vee a) - a \in \mathfrak{M}^+$

2) $f \in \mathfrak{M}^+$, $\psi : [0,+\infty] \to [0,+\infty]$ è cont. e crescente e $\psi(0) = 0 \Longrightarrow \psi \circ f \in \mathfrak{M}^+$

3) $f_n \in \mathfrak{M}^+$ e $f_n \xrightarrow{n} f$ uniformemente $\Longrightarrow f \in \mathfrak{M}^+$ .

4) Se $\mathcal{A}$ è un'algebra (o più semplicemente un anello) allora

$$f,g \in \mathfrak{M}^+ \Longrightarrow f \wedge g, \ f \vee g, \ f + g, \ f \cdot g \in \mathfrak{M}^+$$

5) Se $\mathcal{A}$ è una $\sigma$-algebra allora

$$f \ \mathcal{A}\text{-misurabile} \Longleftrightarrow \forall a \in \mathbb{R}: \{f < a\} \in \mathcal{A}$$

Osservazione (12.5) Se $\mathcal{A}$ è solo un'algebra ed $f,g \in \mathfrak{M}$ non è affatto detto che sia $f + g \in \mathfrak{M}$ . Infatti se ad esempio $\mathcal{A} = \{ A \subset \mathbb{N};\ A \text{ finito o cofinito}\}$

dire che $f : \mathbb{N}\ \overline{\mathbb{R}}$ sia $\mathcal{A}$-misurabile, equivale a dire che $\exists \lim_n f(n) \in \overline{\mathbb{R}}$ pertanto nel caso in cui $\lim_n f(n)=+\infty$ e $\lim_n g(n)=-\infty$ risultano $f,g \in \mathfrak{M}$ ma non è affatto detto che sia $f+g \in \mathfrak{M}$. Se $\mathcal{A}$ è invece una $\sigma$-algebra allora $\mathfrak{M}$ è chiusa rispetto alla somma.

Un particolare tipo di funzioni $\mathcal{A}$ misurabili sono le funzioni $\mathcal{A}$-semplici $S = S(X,\mathcal{A})$ che sono combinazioni lineari di funzioni caratteristiche $\varphi_A$ con $A \in \mathcal{A}$. Orbene in [8] si prova che ogni funzione $\mathcal{A}$-misurabile è il limite uniforme di funzioni $\mathcal{A}$-semplici.

In altre parole introdotta su $\mathfrak{M}$ la metrica (della converg.-uniforme)

$$d(f,g) = \sup \{ |\operatorname{arctg} f(x) - \operatorname{arctang} (x)| : x \in \mathbb{R} \}$$

$(\mathfrak{M},d)$ diventa uno spazio metrico ed $\bar{S} = \mathfrak{M}$.

Denotato con $\mathfrak{M}_b$ l'insieme delle funzioni $\mathcal{A}$-misurabili e limitate, quest'insieme è invece un'algebra di funzioni isomorfe all'algebra delle funzioni continue e limitate definite sullo spazio di Stone $[\mathcal{A}]$ associato ad $\mathcal{A}$ (cfr. Oss. (12.1) (12.4). e [8]).

Tra le tante conseguenze del teorema di rappresentazione di Stone, segnaliamo la seguente proposizione che dà utili informazioni sul codominio di una misura.

<u>Proposizione</u> (12.9) Se $\mu$ è una misura sull'algebra $\mathcal{A}$ allora detto $R_\mu = \{ \mu(A) : A \in \mathcal{A} \}$ , risulta che $\overline{R_\mu}$ è il codominio di una $\sigma$-misura su una $\sigma$-algebra.

DIM.

Definita $\mu^*(A^*) = \mu(A)$ $\forall A \in \mathcal{A}$, per quanto visto $\mu^*$ è una $\sigma$-misura sull'algebra $\mathcal{A}^*$ (dei clopen di $[\mathcal{A}]$).

Denotata con $\mathcal{A}^*_\sigma$ la $\sigma$-algebra generata da $\mathcal{A}^*$, $\mu^*$ può essere esteso ad una $\sigma$-misura $\tilde{\mu}$ su $\mathcal{A}^*_\sigma$. Risulta $R_{\tilde{\mu}}$ chiuso (questo è un risultato valido per le $\sigma$-misure su $\sigma$-algebre, cfr. [9]) e da $R_{\mu^*} \subset R_{\tilde{\mu}}$ segue che

$\overline{R}_{\mu^*} \subset R_{\tilde{\mu}}$ . Viceversa se $a \subset R_{\tilde{\mu}}$ $\exists A \in \mathcal{A}_\sigma^*$ tale che $\tilde{\mu}(A) = a$. Ma $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ con $A_n \in \mathcal{A}^*$ opportune e disgiunte e quindi $a = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\mu}(A_n) =$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n) = \lim_n \sum_{k=1}^{m} \mu^*(A_k), \text{ cioé } \overline{R}_{\mu^*} = R_{\tilde{\mu}} .$$

L'asserto ora segue dal fatto che $R_\mu = R_{\mu^*}$ cvd.

Osservazione (12.6) . In [10] si dà un'altra definizione di funzioni misurabili. Se $\mu$ è una misura sull'algebra $\mathcal{A}$ di parti di $X$, si definisce $\mu_e : \mathcal{P}(X) \to \mathbb{R}$ ponendo

$$\mu_e(A) = \inf\{\mu(B);\ B \supset A \quad \text{e} \quad B \in \mathcal{A}\}$$

e se $f_n, f \in \overline{\mathbb{R}}^X$ si dice che $f_n \underset{\mu}{\rightarrow} f$ se e solo se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \lim_n \mu_e\{|f_n - f| > \varepsilon\} = 0 .$$

Se $S = S(X,\mathcal{A})$ è al solito l'insieme delle funzioni semplici, si dice che $f$ è $(\mathcal{A},\mu)$-misurabile se e solo se $\exists \{s_n;\ n \in \mathbb{N}\} \subset S$ tale che $s_n \underset{\mu}{\rightarrow} f$ .

Questa definizione è ben diversa da quella data precedentemente, in quanto qui interviene anche la misura $\mu$ ; è pertanto arduo legare in generale le due definizioni.

Riportiamo qui alcuni esempi tratti da [11], che illustrano la differenza delle due definizioni. Denoteremo con $\mathcal{M}_D$ l'insieme delle funzioni $(\mathcal{A},\mu)$-misurabili.

Esempio 1. Sia $\mathcal{A}$ l'algebra generata dagli intervalli contenuti in $[0,1]$ . Le funzioni $\mathcal{A}$-misurabili sono tutte le funzioni $f : [0,1] \to \overline{\mathbb{R}}$ tali che i seguenti limiti esistono in $\mathbb{R}$:

$$\lim_{x\to 1-} f(x) , \quad \lim_{x\to 0+} f(x) , \lim_{x\to y+} f(x), \lim_{x\to y-} f(x) \qquad \forall y \in ]0,1[ .$$

Se $\mu$ è la misura di Peano-Jordan su $\mathcal{A}$ una funzione f limitata è $(\mathcal{A},\mu)$-misurabile se e solo se è integrabile secondo Riemann.

Esempio 2.

Se $\mathcal{A} = \{A \subseteq \mathbb{N}\ ;\ A \text{ finito o cofinito}\}$ ed $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ risulta

$$f \in \mathcal{M} \iff \exists \lim_n f(n) \in \mathbb{R}.$$

Se $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to [0,1]$ è la misura definita da $\mu(A) = \sum_{n\in A} \frac{1}{2^n}$ per ogni $A \subseteq \mathbb{N}$, risulta $\mathcal{M}_D = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ cioé $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}_D$.

Citiamo il seguente risultato (cfr. [11]).

Proposizione (12.10) Se $\mu$ è una misura sull'algebra $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ risulta $\bar{\mathcal{A}} = \{H \subseteq X : \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, A,B \in \mathcal{A}$ con $A \subset H \subset B$ e $\mu(B-A) < \varepsilon\}$ un'algebra contenente A.

Si ha

$$f : X \to \mathbb{R} \text{ è } (\mathcal{A},\mu) \text{ misurabile} \iff f \text{ è } \bar{\mathcal{A}}\text{-misurabile e}$$

$$\lim_{n \to +\infty} \mu_e\{|f| > n\} = 0.$$