§ 9 - Algebre Booleane m-complete.

Sia $\mathcal{A}$ un'algebra Booleana ed m un cardinale infinito. Se accade che $\forall \{A_i ; i \in I\} \subset \mathcal{A}$ con card I = m, $\exists \bigcup_{i\in I}^{\mathcal{A}} A_i$ (o equivalentemente $\exists \bigcap_{i\in I}^{\mathcal{A}} A_i$), allora diremo che $\mathcal{A}$ è m-completa o è una m-algebra . In particolare se $m = \aleph_0$ allora diremo che $\mathcal{A}$ è una σ-algebra.

Diremo poi che $\mathcal{A}$ è completa se è m-completa $\forall$ m .

Un campo d'insiemi $\mathfrak{F}$ si dice m-completo o m-campo se $\forall \{A_t ; t \in T\} \subset \mathfrak{F}$ con card T = m risulta $\bigcup_{t\in T} A_t \in \mathfrak{F}$ (unione insiemistica) o equivalentemente $\bigcap_{t\in I} A_t \in \mathfrak{F}$.

Se questo accade $\forall$m il campo si dice completo..

Osservazione (9.0). Per la (4) di §8 se $\mathcal{A}$ ed $\mathcal{A}'$ sono isomorfe: $\mathcal{A}$ m-completa (completa) $\Rightarrow$ $\mathcal{A}'$ m-completa (completa).

Osservazione (9.1). Un campo d'insiemi $\mathfrak{F}$ può essere m-completo come algebra Booleana ma non essere un m-campo; mentre il viceversa è vero per quanto detto nella B) del §8.

ESEMPI

A) Sia $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$ dove X è infinito. Sia $h : \mathcal{A} \to \mathcal{A}^*$ dove $\mathcal{A}^*$ è il solito campo dei clopen dello spazio di Stone $[\mathcal{A}]$. Poiché $\mathcal{A}$ è un'algebra Booleana completa e poiché $\mathcal{A}^*$ è isomorfa ad $\mathcal{A}$, anche $\mathcal{A}^*$ è un'algebra Booleana completa, tuttavia $\mathcal{A}^*$ non è un σ-campo (cfr. Prop. 15 e Teor.16), in quanto se $\{A_n ; n \in \mathbb{N}\}$ sono a 2 a 2 disgiunti e non vuoti, $\bigcup_{n=1}^{\infty} h(A_n) \notin \mathcal{A}^*$.

B) Se $\mathcal{A}$ è una σ-algebra Booleana infinita, allora card $\mathcal{A} \geq 2^{\aleph_0}$. Infatti poiché per ipotesi $\mathcal{A}$ è infinita $\exists \{A_n ; n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{A}$ con le A_n a 2 a 2 disgiunte e non vuote tali che $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = 1$ (unità dell'algebra). Posto

$\mathfrak{F}=\mathcal{P}(N)$ possiamo definire un isomorfismo $h:\mathfrak{F}\to\mathcal{A}$ ponendo $\forall B\in\mathfrak{F}: h(B) = \bigcup_{n\in B} A_n$

(Essendo $\mathcal{A}$ σ-algebra, risulta sempre $h(B)\in\mathcal{A}$. La sottoalgebra $h(\mathfrak{F})$ di $\mathcal{A}$ è quindi isomorfo ad $\mathfrak{F}$ e card $\mathcal{A} \geq$ card $\mathfrak{F}= 2^{\aleph_0}$.

Si ha il seguente criterio

Teorema (9.1) (di Smith e Tarski)

Se $\{A_i;\ i\in I\}\subset\mathcal{A}$, card $I = m$, le A_i sono a 2 a 2 disgiunte ed $\exists \overset{\mathcal{A}}{\bigcup_{i\in I}} A_i$

allora $\mathcal{A}$ è m-completa

(cfr. [1] pag. 68). In altre parole basta verificare la condizione per le famiglie disgiunte.

DEFINIZIONE. Diremo che un'algebra Booleana $\mathcal{A}$ verifica la condizione di m-catena seper ogni $\{A_i;\ i\in I\}\subset\mathcal{A}$ a 2 a 2 disgiunti, segue che card $I \leq m$.

Teorema (9.2) (di Tarski)

$\mathcal{A}$ algebra Booleana m-completa con la condizione di m-catena $\Rightarrow$ $\mathcal{A}$ è completa.

DIM.- Per il Teorema (9.1) è sufficiente provare che $\forall\{A_i;\ i\in I\}\subset\mathcal{A}$ a 2 a 2 disgiunte risulta $\bigcup_{i\in I} A_i\in\mathcal{A}$. Ma se le A_i sono a 2 a 2 disgiunte, per la condizione di m-catena non può che essere card $I\leq m$ e quindi essendo $\mathcal{A}$ m-algebra risulta $\bigcup_{i\in I} A_i\in\mathcal{A}$

cvd

DEFINIZIONE. Se $\mathcal{A}$ è un'algebra Booleana ed $m:\mathcal{A}\to[0,+\infty]$, diremo che m è una n-misura se

1) $\exists A_0\in\mathcal{A}\ \ni'\ m(A_0) < +\infty$

2) $\forall\{A_i;\ i\in I\}\subset\mathcal{A}$ disgiunti con card $I\leq n$ e tale che $\bigcup_{i\in I} A_i\in\mathcal{A}$ risulta

$$m(\bigcup_{i\in I} A_i) = \sum_{i\in I} m(A_i)$$

dove la somma è così intesa: se $m(A_i) = 0 \ \forall\, i \in I - J$ con J al più numerabile e $\sum_{i\in J} m(A_i) = c < +\infty$ allora $\sum_{i\in I} m(A_i) = c$ altrimenti $\sum_{i\in I} m(A_i) = +\infty$

Nella 2) la condizione $\bigcup_{i\in I} A_i \in \mathcal{A}$ diven ta superflu a nel caso in cui $\mathcal{A}$ è una $\mathfrak{n}$-algebra.

Diremo che m è una <u>σ-misura</u> o che è <u>σ-additiva</u> se è una $\aleph_0$-misura.

<u>Prop.</u> (9.3). Se m è una σ-misura ll'algebra $\mathcal{A}$, $\{A_n, n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{A}$ e $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$, allora:

$$m(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n) \quad (\sigma\text{-}\underline{\text{sub-additività}})$$

(la dim. è l'usuale).

NB. La prop. (9.3) si estende al caso di m $\mathfrak{n}$-misura su una $\mathfrak{n}$-algebra (cfr. [1] pag. 73)

La def. di <u>misura σ-finita</u> è la solita.

Diremo che m è <u>strettamente positiva</u> se

$$m(A) > 0 \quad \forall A \in \mathcal{A} - \{0\}$$

<u>Osservazione</u> (9.2). Se $\exists$ m σ-misura strettamente postivia è σ-finita su $\mathcal{A}$, allora esiste anche una σ-misura strettamente positiva e finita m' su $\mathcal{A}$. Infatti se $\{A_n;\ n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{A}$ disgiunti $\ni'$ $\dot{\bigcup}_{n=1}^{\infty} A_n = 1$ e $0 < m(A_n) < +\infty$ allora posto

$$m'(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m(A \cap A_n)}{2^n\, m(A_n)} \qquad \forall A \in \mathcal{A}$$

si ottiene una σ-misura strettamente positiva e finita.

PROPOSIZIONE (9.4). Se $\mathcal{A}$ è una σ-algebra Booleana avente una misura finita (o σ-misura e σ-finita) strettamente positiva allora $\mathcal{A}$ è completa.

DIM. Per il Teorema (9.2) basta provare che $\mathcal{A}$ verifica la condizione di σ-catena.

Sia $\{A_i;\ i \in I\} \subset \mathcal{A}$ e a 2 a 2 disgiunti e diversi da 0. Posto

$$I_o = \{i \in I : m(A_i) \geq 1\} \quad \text{e per } n \in \mathbb{N} \text{ sia}$$

$$I_n = \{ i \in I : \frac{1}{n+1} \leq m(A_i) < \frac{1}{n} \}$$

risulta $\{I_o, I_1, \ldots\}$ una partizione di I.

Poiché nell'ipotesi in cui siamo se $\{A_1, A_2, \ldots\} \subset \mathcal{A}$ sono disgiunti risulta $\sum_{k=1}^{n} m(A_k) = m(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) \leq m(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k)$ e quindi per $n \to \infty$

$$\sum_{k=1}^{\infty} m(A_k) \leq m(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k),$$

segue che le $I_o, I_1, \ldots, I_2, \ldots$ devono essere necessariamente <u>finite</u> altrimenti se per esempio I_n è infinita, si potrebbe considerare un suo sottoinsieme numerabile J e risulterebbe

$$+\infty = \frac{1}{n+1}(1+1+\ldots) \leq \sum_{i \in J} m(A_i) \leq m(\bigcup_{i \in J} A_i) < +\infty$$

Si conclude che card $I \leq \aleph_o$.

Una dim. analoga si fa se m è σ-misura e σ-finita

cvd

Osservazione (9.3)

Il risultato precednete vale anche se $\mathcal{A}$ è solo un'algebra ed m è una msira finita strettamente positiva su $\mathcal{A}$.

Infatti basta sostituire nella dim. 1 a $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ ed $\bigwedge_{i\in J} A_i$ ($m(1) < +\infty$ per ipotesi).

§ 10 - m-ideali, m-filtri. Algebre quozienti.

DEF. Se $\mathcal{A}$ è un'algebra Booleana m-completa ed $\mathfrak{J}$ è un suo ideale, diremo che è m-completo o m-ideale se

$$\{A_i;\ i \in I\} \subset \mathfrak{J} \text{ e card } I \leq m \Longrightarrow \bigcup_{i\in I} A_i \in \mathfrak{J}$$

Definizione analoga (la duale) si dà per gli m-filtri.

Esempio. A) $\mathfrak{J} = \{A \subset X;\ \text{card } A \leq m\}$ è un m-ideale dell'algebra $\mathcal{P}(X)$ e $\mathfrak{J}^* = \{A \subset X;\ \text{card}(X - A) \leq m\}$ è un m-filtro.

DEF. Se $\mathfrak{J}$ è un ideale di $\mathcal{A}$ posto

$A \sim B \iff A-B \in \mathfrak{J}$ e $B-A \in \mathfrak{J}$ ($\iff A \triangle B \in \mathfrak{J}$ cfr. §2 prop. 1) risulta $\sim$ una relazione di equivalenza su $\mathcal{A}$ e l'insieme delle classi di equivalenza $\{[A];\ A \in \mathcal{A}\}$