CALCOLO DELLE VARIAZIONI E TEORIA GEOMETRICA DELLA MISURA

Intendo parlare delle soluzioni deboli ottenibili col metodo diretto del CdV (Calcolo delle Variazioni) e della loro regolarizzazione, nella quale svolge un ruolo fondamentale la TGdM (Teoria Geometrica della Misura).

Il protagonista della prima parte di questo programma è l'integrale

$$\mathcal{F}(u) = \int_\Omega F(Du(x))\,dx \quad ,$$

dove Ω è un aperto limitato di R^n , $F : R^n \to R$ è data e supposta convessa non negativa, $u : \Omega \to R$ è da intendersi variabile.

Con D indichiamo l'operatore gradiente, cioé

$$Du(x) = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}(x) \; , \; \frac{\partial u}{\partial x_2}(x) \; , \ldots , \; \frac{\partial u}{\partial x_n}(x)\right) \; .$$

Deve essere noto da almeno due secoli e mezzo, essendovi associato il nome di Eulero, il fatto che una funzione u regolare e minimizzante $\mathcal{F}$, sia pure sotto certe restrizioni, deve soddisfare l'equazione

$$\text{(1)} \qquad \operatorname{div}\left\{DF(Du(x))\right\} = 0 \quad , \quad \forall\, x \in \Omega \quad .$$

E' però dovuta a Gauss, e non più vecchia di 150 anni, l'osservazione che la ricerca diretta del minimo di $\mathcal{F}$ è un modo per risolvere l'equazione