CAPITOLO III

Gruppi di funzioni.

1. Gruppi di funzioni. Basi di un gruppo.

La teoria dei gruppi di funzioni costituisce un ponte di passaggio fra la teoria delle trasformazioni canoniche e la teoria degli integrali primi del moto.

Sia dato un sistema di s funzioni $f_1 \ldots f_s$, fra loro indipendenti, delle variabili $q^1 \ldots q^n$ $p_1 \ldots p_n$. Le loro $\binom{n}{2}$ PP sono esse stesse funzioni delle q p. Se qualcuna di tali funzioni non è esprimibile come funzione delle $f_1 \ldots f_s$, la si aggiunga al sistema di partenza e si formino tutte le PP del nuovo sistema. Così procedendo si perviene infine ad un sistema di $r(\leq 2n)$ funzioni $f_1 \ldots f_r$ aventi la proprietà che la PP di ogni coppia di esse è funzione delle $f_1 \ldots f_r$ stesse. Ciò è vero anche per tutte le funzioni delle $f_1 \ldots f_r$. Infatti se $F_1 = F_1(f_1 \ldots f_r)$ e $F_2 = F_2(f_2 \ldots f_r)$ si ha

$$(F_1, F_2)_{qp} = \frac{\partial F_1}{\partial f_1} \frac{\partial F_2}{\partial f_k} (f_1; f_2)_{qp}$$

e questa è ancora una funzione delle $f_1 \ldots f_r$.

L'insieme delle $f_1 \ldots f_r$ e delle funzioni di esse costituisce un <u>gruppo di funzioni</u> di rango r.

Le r funzioni $f_1 \ldots f_r$ o una qualunque r^{upla} indipendente del gruppo, costituisce una <u>base</u> del gruppo stesso.

Un sottoinsieme del gruppo che sia esso stesso un gruppo è poi un <u>sottogruppo</u> del gruppo dato.

Sussiste la proposizione la cui dimostrazione è lasciata come esercizio.

Se due gruppi di funzioni di ranghi r_1 e r_2 hanno intersezione non vuota, le funzioni comuni costituiscono un sottogruppo di ognuno dei due gruppi.

Si consideri ora il sistema

$$(1.1) \qquad (f_i\ g) = 0 \qquad (i = 1...r) \quad .$$

Introdotti gli operatori lineari

$$X_i = \frac{\partial f_i}{\partial p_k} \frac{\partial}{\partial q^k} - \frac{\partial f_i}{\partial q^k} \frac{\partial}{\partial p_k}$$

si ha (II n° 9)

$$(X_i , X_k) g = - \frac{\partial F_{ik}}{\partial f_\sigma} X_\sigma g = 0$$

cioé il sistema (1) è completo. Esso possiede $2n-r$ soluzioni indipendenti $g_1 ... g_{2n-r}$ le quali,come è facile riconoscere, costituiscono un gruppo di ordine $2n-r$. Infatti dall'identità di Jacobi segue immediatamente che tutte le PP:(g_i , g_j) sono soluzioni del sistema (1) e quindi sono funzioni delle g.

Il gruppo $f_1 ... f_r$ individua perciò un gruppo di base $g_1 ... g_{2n-r}$ le cui funzioni hanno PP nulle con le f_i(si dice anche che le g sono in involuzione con le f).

I due gruppi sono detti reciproci e le funzioni di ognuno dei due gruppi sono dette singolari per l'altro gruppo.

Non è escluso naturalmente che la intersezione dei due gruppi sia non vuota e cioé che un gruppo contenga proprie funzioni singolari. E' ovvio che le funzioni singolari di un gruppo costituiscono un sottogruppo del gruppo dato e quindi anche del gruppo reciproco. Come corollario si ha che il gruppo reciproco di un gruppo che non contiene funzioni singolari, non contiene neanche esso funzioni singolari.

In particolare un gruppo costituito tutto da funzioni singolari è detto commutativo .

Esso è un sottogruppo del proprio gruppo reciproco e quindi si ha

$r \leq 2n-r$ ossia $r \leq n$.

Poiché si ha, per ogni funzione $\bar{f}$ del gruppo

$$(f_i \bar{f}) = \frac{\partial \bar{f}}{\partial f_k} (f_i f_k)$$

le funzioni singolari appartenenti al gruppo sono le soluzioni del sistema di r equazioni

$$(1.2) \qquad (f_i, f_k) \frac{\partial \bar{f}}{\partial f_k} = 0$$

nelle r variabili $f_1 \dots f_k$. Questo sistema ha soluzioni $\bar{f}(f_1 \dots f_r)$ non costanti se e solo se il rango della matrice $\|(f_i, f_k)\|$ è minore di r.

D'altra parte il sistema (2) è del tipo (9.5) Cap. II e quindi è completo. Perciò se $r - m$ è il rango della matrice $\|(f_i, f_k)\|$, il sistema (2) ammette m soluzioni indipendenti e quindi il gruppo dato contiene m funzioni singolari.

Il numero di funzioni singolari coincide pure col numero di relazioni funzionali indipendenti che sussistono fra le funzioni del gruppo dato e quelle del gruppo reciproco.

Infatti se esistono m relazioni funzionali fra le funzioni della base e quelle di una base reciproca g, la matrice

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial q^1} & \frac{\partial f_2}{\partial q^1} & \frac{\partial g_1}{\partial q^1} & & \frac{\partial g_{2n-r}}{\partial q^1} \\ \\ \frac{\partial f_1}{\partial p_n} & \frac{\partial f_2}{\partial p_n} & \frac{\partial g_1}{\partial p_n} & & \frac{\partial g_{2n-r}}{\partial p_n} \end{vmatrix}$$

ha rango $2n-m$ e quindi esistono m combinazioni lineari nulle delle colonne, per es.

$$\frac{\partial f_i}{\partial q^k} = \sum_{s=m+1}^{r} \lambda_s \frac{\partial f_s}{\partial q^k} + \sum_{s=1}^{2n-r} \mu_s \frac{\partial g_s}{\partial q^k} \qquad (i = 1 \dots m)$$

$$\frac{\partial f_i}{\partial p_k} = \sum_{s=m+1}^{r} \lambda_s \frac{\partial f_s}{\partial q^k} + \sum_{s=1}^{2n-r} \mu_s \frac{\partial g_s}{\partial q^k} \qquad (i = 1 \,....m)$$

si ha così

$$(f_i f_j) = \frac{\partial f_i}{\partial p_k} \frac{\partial f_j}{\partial q^k} - \frac{\partial f_i}{\partial q^k} \frac{\partial f_j}{\partial p_k} =$$

$$= \sum_s \lambda_s \frac{\partial f_s}{\partial p_k} \frac{\partial f_j}{\partial q^k} + \sum \mu_s \frac{\partial g_s}{\partial p_k} \frac{\partial f_j}{\partial q^k} -$$

$$- \sum_s \lambda_s \frac{\partial f_s}{\partial q^k} \frac{\partial f_j}{\partial p_k} - \sum \mu_s \frac{\partial g_s}{\partial q^k} \frac{\partial f_j}{\partial p_k} =$$

$$= \sum \lambda_s (f_s f_j) + \sum \mu_s (g_s f_j) \qquad \begin{pmatrix} i = 1 \,...\, m \\ j = m+1 \,...\, r \end{pmatrix}$$

$$= \sum \lambda_s (f_s f_j)$$

poiché le g_s sono singolari per il gruppo dato.

La matrice $(f_\alpha f_\beta)$ ha dunque m righe combinazioni lineari delle altre e quindi come si è appena visto, esistono fra le f m funzioni singolari.

D'altra parte se il gruppo contiene m funzioni singolari ϕ_i queste sono funzioni delle funzioni di base

$$\phi_i = A_i(f_1 ... f_r) \qquad i = 1 \,...m \ .$$

Ma le g sono soluzioni del sistema completo

$$(f_\alpha \, g) = 0 \qquad (\alpha = 1..r)$$

che dà il gruppo reciproco. Le funzioni g, come soluzioni di detto sistema sono quindi funzioni della base del gruppo reciproco e si ha:

$$\phi_i = A_i(f_1 ... f_r) = B_i(g_1 ... g_2) \qquad i = 1...m$$

e quindi esistono m relazioni funzionali fra le funzioni del gruppo dato e del suo reciproco.

2. Basi canoniche di un gruppo.

Se le PP delle funzioni di una base hanno soltanto valore 0 o 1, la base è detta canonica.

Un gruppo non commutativo possiede sempre una base canonica. Infatti sia per es. f_1 una funzione non singolare (tale funzione esiste perché il gruppo per ipotesi è non commutativo) e si consideri l'equazione

$$(f_1 f) = \frac{\partial f}{\partial f_k}(f_1, f_k) = -1$$

o esplicitamente:

$$\sum_{k=r}^{r}(f_1 f_k)\frac{\partial f}{\partial f_k} = -1 .$$

Questa equazione lineare del primo ordine ammette certamente soluzioni (I n° 2) e una sua generica soluzione, poiché non sono tutte nulle le $\frac{\partial f}{\partial f_k}$ (k = 2...r), è funzione di almeno una f_k con $k \neq 1$. Se Ψ_1 è una soluzione e se si indica con ϕ^1 la funzione f_1, si ha

$$(\Psi_1, \phi^1) = 1 \qquad .$$

Le funzioni Ψ_1 e ϕ_1 e r-2 funzioni indipendenti del gruppo, costituiscono una base di questo.

Si consideri il sistema omogeneo:

$$(2.1) \qquad \begin{cases} (\phi^1, f) = \dfrac{\partial f}{\partial \Psi_1} + (\phi_1\ f_\alpha)\ \dfrac{\partial f}{\partial f_\alpha} = 0 \\ \\ (\Psi_1 f) = -\dfrac{\partial f}{\partial \phi^1} + (\Psi_1 f_\alpha)\ \dfrac{\partial f}{\partial f_\alpha} = 0 \end{cases} \qquad (\alpha = 3...r)$$

Il commutatore degli operatori lineari nei primi membri si calcola nel modo visto nel 9 del Cap. II e si ha:

$$(\phi^1(\Psi_1 f)) - (\Psi_1(\phi_1 f)) = ((\phi^1, \Psi_1)f) = (1f) = 0 .$$

Il sistema è quindi completo. Nelle variabili indipendenti $\phi^1 \Psi_1 f_3 ... f_r$

esso possiede $r-2$ soluzioni (funzioni di tali variabili): $\bar{f}_3 \ldots \bar{f}_r$.

La identità di Jacobi mostra poi che la PP di una generica coppia di soluzioni è ancora una soluzione del sistema (1) e quindi è funzione delle $\bar{f}_3 \ldots \bar{f}_r$: le funzioni $\bar{f}_3 \ldots \bar{f}_r$ costituiscono perciò un sottogruppo del gruppo di partenza. Se questo sottogruppo è commutativo si ha:

$$(\phi^1 \psi_1) = 1 \ ; \ (\phi^1 \bar{f}_\alpha) = (\psi_1 \bar{f}_\alpha) = (\bar{f}_\alpha \bar{f}_\beta) = 0 \qquad (\alpha, \beta = 3 \ldots r);$$

pertanto le funzioni $\phi^1 \psi_1 \bar{f}_3 \ldots \bar{f}_r$ costituiscono una base canonica.

Se il sottogruppo non è commutativo, si procede oer esso come per il gruppo di partenza fino a giungere ad un gruppo commutativo o ad esaurire tutte le funzioni. La base così ottenuta:

(2.2) $$\phi^1 \ldots \phi^{m+q} \ \psi_1 \ldots \psi_m \qquad (m+q = r;\ q \leq r)$$

è canonica perché soddisfa le relazioni:

(2.3) $$(\phi^i \phi^k) = 0; \ (\psi_\alpha \psi_\beta) = 0 \qquad (\psi_\alpha \phi^k) = \delta^k_i$$

$$\begin{pmatrix} i,k = 1 \ \ldots \ m+q \\ \alpha,\beta = 1 \ldots . \ m \end{pmatrix}$$

Le funzioni $\phi^{m+1} \ldots \phi^{m+q}$ sono ovviamente funzioni singolari del gruppo e quindi appartengono anche al gruppo reciproco. Inoltre è chiaro, in base alla definizione di sottogruppo, che ogni sottoinsieme di funzioni della base canonica è base di un sottogruppo del gruppo dato. Se allora dalla base canonica si omette una delle funzioni, per es. ϕ_{m+1}, le funzioni restanti

(2.4) $$\psi_1 \ldots \psi_m \phi^1 \ldots\ldots \phi^m \phi^{m+2} \ldots \phi^{m+q}$$

costituiscono la base di un sottogruppo. D'altra parte la funzione ϕ^{m+1} è singolare non solo per il gruppo dato, ma anche per il sottogruppo e pertanto appartiene al reciproco di questo il quale, quindi, è del tipo:

(2.5) $$\phi^{m+1} u_1 \ldots \omega_{2(n-m)-q+1} .$$

La funzione ϕ^{m+1} non è singolare per il gruppo (5), perché in tal caso essa apparterrebbe al reciproco di (5)e cioé al gruppo (4) al (quale invece non appartiene). Ciò può anche riconoscersi osservando che le funzioni del gruppo reciproco del gruppo (2) sono le funzioni $\phi^{m+1} \ldots \phi^{m+q}$ più certe funzioni che saranno indicate complessivamente con X. Le funzioni del reciproco del gruppo (4) sono $\phi^{m+2} \ldots \phi^{m+q}$,X. Se ϕ^{m+1} commutasse *con tutte le funzioni del gruppo (5)* esso apparterrebbe al reciproco di tale gruppo, cioé al gruppo (4) e quindi i gruppi (2) e (4) avrebbero lo stesso gruppo reciproco. Ora ciò non è possibile perché il reciproco di (2) contiene $2n-(2m+q)$ funzioni e il reciproco di (4), contiene $2n-(2m+q-1)$ funzioni.

Essendo ϕ^{m+1} non singolare per il gruppo (5), si può trovare per questo gruppo una funzione ψ_{m+1} non appartenente al gruppo (2) e tale che: $(\psi_{m+1}, \phi^{m+1}) = 1$. Aggiungendo ψ_{m+1} al gruppo di partenza (2) si ottiene un gruppo di ordine $r+1$ per il quale le funzioni $\psi_1 \ldots \psi_{m+1}, \phi^1 \ldots \phi^{m+q}$ costituiscono una base canonica.

Inoltre il gruppo (2) è un sottogruppo del nuovo gruppo.

Ripetendo il procedimento per le funzioni $\phi^{m+2} \ldots \phi^{m+q}$ si perviene infine ad una base canonica di un gruppo di ordine $r+q$ del quale il gruppo di partenza è un sottogruppo.

Le relazioni canoniche

(2.6) $$(\phi^i \phi^k) = 0 = (\psi_i \psi_k); \; (\psi_i \phi^k) = \delta_i^k \qquad (i,k = 1 \ldots m+1)$$

mostrano che il nuovo gruppo non contiene funzioni singolari. Infatti per una generica funzione del gruppo risulta per le (6)

$$(f\, \phi^i) = \frac{\partial f}{\partial \psi_i} \; ; \; (f\, \psi_i) = - \frac{\partial f}{\partial \phi^i}$$

che mostrano che nessuna funzione effettivamente dipendente dalle ϕ^i, Ψ_i è singolare.

Poiché il gruppo di ordine r+m al quale si è pervenuti è privo di funzioni singolari, il gruppo reciproco ha la stessa proprietà (n. 1): tale gruppo ha rango 2n-(r+m).

Denotando con $\phi^{r+m+1} \ldots \phi^n$, $\Psi_{r+m+1} \ldots \Psi_n$ una sua base canonica, si ha infine che l'unione dei due gruppi costituisce un gruppo di ordine 2n privo di funzioni singolari (gruppo massimale) per il quale l'insieme delle funzioni $\phi^1 \ldots \phi^n$ $\Psi_1 \ldots \Psi_n$ costituisce una base canonica

$$(2.7) \qquad (\phi^i \phi^k) = 0 = (\Psi_i \Psi_k); \; (\Psi_i \phi^k) = \delta_i^k \qquad (i,k = 1 \ldots n)$$

Raccogliendo si ha:

Un gruppo di ordine r è sottogruppo di un gruppo di ordine 2n per il quale esiste una base canonica, cioè una base soddisfacente le (7).

Ricordando i risultati del Cap.II n. 7, si riconosce che le funzioni ϕ^i, Ψ_i individuano una trasformazione di contatto non omogenea ristretta (trasformazione canonica). In particolare se le q^i sono omogenee di grado zero nelle p, la trasformazione di contatto è omogenea.

Siano dati due gruppi dello stesso ordine e contenenti lo stesso numero di funzioni singolari. Entrambi i gruppi possono essere estesi a gruppi di ordine 2n, privi di funzioni singolari. Siano $\phi^1 \ldots \phi^n, \Psi_1 \ldots \Psi_n$ e $\phi'^1 \ldots \phi'^n$ $\Psi'_1 \ldots \Psi'_n$ due basi rispettive dei gruppi estesi. In virtù dei risultati del Cap.II n° 7 esistono due funzioni, ϕ^{n+1}, ϕ'^{n+1} tali che le relazioni:

$$(2.8) \qquad Q^n = q^{n+1} + \phi^{n+1}(qp) \; ; \; Q^i = \phi^i(qp); \; P_i = \Psi_i(qp)$$

$$(2.9) \qquad Q'^{n+1} = q'^{n+1} + \phi'^{n+1}(q'p'); \; Q'^i = \phi'^i(q'p'); \; P'_i = \Psi'_i(q'p')$$

definiscono due trasformazioni canoniche.

Le trasformazioni

$$qp \to QP \;;\; QP \to Q'P' ;\; Q'P' \to q'p'$$

sono tutte e tre canoniche (la seconda è l'identità e la terza è l'inversa della (9) che è canonica) e quindi la trasformazione $qp \to q'p'$ e pur essa canonica (II n° 7).

Essa trasforma le funzioni $\phi^i \Psi_i$ nelle funzioni $\phi'^i \Psi'_i$ e pertanto può essere individuata in forma implicita dalle $2n$ uguaglianze

$$(2.10) \qquad \phi^i(qp) = \phi'^i(q'p')); \quad \Psi_i(qp) = \Psi'_i(q'p').$$

Alle (13) va aggiunta la relazione:

$$(2.12) \qquad Q'^{n+1} + \phi'^{n+1} = q^{n+1} + \phi^{n+1} \; .$$

D'altra parte le funzioni $\phi^i, \Psi_i(\phi'^i, \Psi'_i)$ in base ai risultati del Cap. II n. 7 individuano, a meno di una costante additiva, la funzione $\phi^{n+1}(\phi'^{n+1})$ e quindi in sostanza la trasformazione che realmente interessa è quella espressa dalle (10), nelle quali non compaiono le variabili con indice $n+1$.

In meccanica analitica la situazione è esattamente la stessa, come si vedrà nei Capp. IV e V.

3. Gruppi massimali dipendenti da un parametro.

Sia $f_i(q\ p\ t)$ una base di un gruppo di funzioni di ordine $2n$ nelle $2n$ variabili qp, priva di funzioni singolari (gruppo massimale). Si supponga inoltre che il gruppo dipenda da un parametro t e cioé che le funzioni $f_1 \ldots f_{2n}$ costituiscano una base di un gruppo per ogni valore di t in un aperto opportuno.

E' possibile allora dimostrare che ogni base del gruppo è sistema completo di soluzioni di una equazione a derivate parziali del primo ordine, avente forma standard.

Per dedurre l'equazione, si consideri la matrice a $2n$ righe e $2n+1$ colonne (si usa la notazione compatta (II n° 9)

$$(3.1)\qquad \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f^1}{\partial \omega^1} & \dfrac{\partial f^1}{\partial \omega^{2n}} & \dfrac{\partial f^1}{\partial t} \\ \dfrac{\partial f^{2n}}{\partial \omega^1} & \dfrac{\partial f^{2n}}{\partial \omega^{2n}} & \dfrac{\partial f^{2n}}{\partial t} \end{vmatrix}$$

Si indichino rispett. con χ^α e χ^t i minori di ordine $2n$ di questa matrice ottenuti omettendo la colonna delle derivate rispetto ad ω^α e a^t rispettivamente.

Poiché le *f, come funzioni delle* ω *sono indipendenti, risulta*

$$(3.2)\qquad \chi^t \neq 0 \quad .$$

Poiché, inoltre, la matrice (1) ha rango $2n$, il sistema

$$\bar{\chi}^\alpha \partial_\alpha f^i + \chi^t \partial_t f^i = 0 \qquad (i = 1 \dots 2n)$$

nelle $2n+1$ incognite $\bar{\chi}^\alpha \chi^t$, ammette autosoluzioni e poiché si tratta di un sistema di $2n$ equazioni in $2n+1$ incognite, queste ultime sono proporzionali ai minori della (1).

Viceversa con queste soluzioni $\bar{\chi}^\alpha, \bar{\chi}^t$ si può costruire una equazione a derivate parziali

$$(3.3)\qquad \bar{\chi}^\alpha \partial_\alpha f + \bar{\chi}^t \partial_t f = 0$$

che ha ovviamente un sistema di soluzioni coincidente con le $2n$ funzioni date $f_1 \dots f_{2n}$.

Ogni funzione delle soluzioni di (3) è anch'essa una soluzione di (3): di conseguenza, quando le f_i costituiscono un gruppo di funzioni, le PP $(f^i f^k)$ sono anch'esse soluzioni di tale equazione

$$(3.4)\qquad \bar{\chi}^\alpha \partial_\alpha (f^i f^k) + \chi^t \partial_t (f^i f^k) = 0$$

Le (4) si possono scrivere esplicitamente

$$(3.5)\qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial\omega^1}(f^i f^k) & \ldots & \frac{\partial}{\partial\omega^{2n}}(f^i f^k) & \frac{\partial}{\partial t}(f^i f^k) \\ \frac{\partial}{\partial\omega^1} f^1 & \ldots & \frac{\partial}{\partial\omega^{2n}} f^1 & \frac{\partial}{\partial t} f^1 \\ \frac{\partial}{\partial\omega^1} f^{2n} & \ldots\ldots & \frac{\partial}{\partial\omega^{2n}} f^{2n} & \frac{\partial}{\partial t} f^{2n} \end{vmatrix} = 0$$

e queste danno una condizione necessaria perché le f^i costituiscano un gruppo (massimale).

E' facile riconoscere che le (5) danno una condizione pure sufficiente perché le f costituiscano un gruppo massimale ad un parametro. Infatti se si esegue la trasformazione di variabili

$$\begin{cases} \xi^i = f^i(\omega t) \\ t = t \end{cases}$$

in un sistema del tipo

$$(3.6)\qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial a^{ik}}{\partial\omega^1} & \frac{\partial a^{ik}}{\partial t} \\ \frac{\partial f^1}{\partial\omega^1} & \frac{\partial f^1}{\partial t} \\ \frac{\partial f^{2n}}{\partial\omega^1} & \frac{\partial f^{2n}}{\partial t} \end{vmatrix} = 0$$

le funzioni $a^{ik}(\omega t)$ si mutano in certe funzioni $\bar{a}^{ik}(\xi t)$:

$$(3.7)\qquad a^{ik}(\omega t) = \bar{a}^{ik}(\xi t)$$

e la prima riga delle (6) si può scrivere:

$$\frac{\partial \bar{a}^{ik}}{\partial \xi^r} \qquad \frac{\partial f^r}{\partial \omega^1} \qquad\qquad\qquad \frac{\partial a^{ik}}{\partial t}$$

In base alle (6) i coefficienti $\frac{\partial \bar{a}^{ik}}{\partial \xi^r}$ debbono essere gli stessi anche per gli elementi dell'ultima colonna e cioé si deve avere:

$$\frac{\partial a^{ik}}{\partial t} = \frac{\partial \bar{a}^{ik}}{\partial \xi^r} \quad \frac{\partial f^r}{\partial t}$$

D'altra parte dalle (7) segue:

$$\frac{\partial a^{ik}}{\partial t} = \frac{\partial \bar{a}^{ik}}{\partial \xi^r} \quad \frac{\partial \xi^r}{\partial t} + \frac{\partial \bar{a}^{ik}}{\partial t}$$

e confrontando

$$\frac{\partial \bar{a}^{ik}}{\partial t} = 0$$

Perciò le $\bar{a}^{ik}$ sono funzioni solo delle ξ^r e non di t. Allorquando $a^{ik} = (f^i f^k)$ ciò equivale a dire che le f^i costituiscono un gruppo e cioé che il sistema (6) costituisce una condizione sufficiente perché le f^i forniscano un gruppo.

Si ha quindi la seguente proposizione:

Condizione necessaria e sufficiente perché $2n$ funzioni indipendenti $f^1(\cdot t) \dots f^{2n}(\cdot t)$ costituiscano una base di un gruppo massimale e che esse siano soluzioni del sistema (6).

In virtù della (2) si può ora porre

$$\omega^\alpha = \frac{\bar{x}^\alpha}{x^t}$$

e si può scrivere la (3) nella forma:

$$\omega^\alpha \partial_\alpha f + \partial_t f = 0 \tag{3.8}$$

Questa equazione ha la forma della equazione degli integrali primi di un sistema canonico (v. V n. 1) se esiste una funzione h tale che

$$\omega^\alpha = \varepsilon^{\beta\alpha} \partial_\beta h \tag{3.9}$$

dove la matrice $\varepsilon^{\beta\alpha}$ è definita dalla (9.1) Cap. II.

Per riconoscere l'esisterza di h, si osservi che, moltiplicando la (9) per l'inversa $\varepsilon_{\alpha\gamma}$ ci $\varepsilon^{\beta\alpha}$ si ha:

(3.10) $$\partial_\beta h \quad \varepsilon_{\alpha\gamma}\chi^\alpha$$

e quindi le quantità $\varepsilon_{\alpha\gamma}\chi^\alpha$ debbono essere le derivate di un'unica funzione. Per l'esistenza d· h è quindi necessario e sufficiente che:

(3.11) $$\partial_\gamma(\varepsilon_{\alpha\beta}\chi^\alpha) = \partial_\beta(\varepsilon_{\alpha\gamma}\chi^\alpha)$$

cioé

$$\varepsilon_{\alpha\beta}\partial_\gamma\chi^\alpha = \varepsilon_{\alpha\gamma}\partial_\beta\chi^\alpha .$$

Moltiplicando per $\varepsilon^{\rho\beta}\varepsilon^{\sigma\gamma}$ si ha:

(3.11') $$\varepsilon^{\sigma\gamma}\partial_\gamma\chi^\rho = \varepsilon^{\rho\beta}\partial_\beta\chi^\sigma \quad .$$

Viceversa moltiplicando le (11') per $\varepsilon_{\mu\rho}\varepsilon_{\gamma\sigma}$ si ottengono le (11): questi due complessi di relazioni sono quindi equivalenti e pertanto le (11') assicurano la validità delle (10).

Si consideri ora la (8). Se le sue soluzioni costituiscono un gruppo, sussistono pure le equazioni:

$$\chi^\alpha\partial_\alpha(f^i f^k) + \partial_t(f^i f^k) = 0 .$$

Esplicitando si ha dopo aver ripetutamente utilizzato la (8):

$$\varepsilon^{\mu\gamma}\partial_\mu f^i\left[\partial_\gamma(\chi^\alpha\partial_\alpha f^k) - \partial_\gamma\chi^\alpha\partial_\alpha f^k\right] + \varepsilon^{\mu\gamma}\partial_\gamma f^k\left[\partial_\mu(\chi^\alpha\partial_\alpha f^i) -\right.$$

$$\left.- \partial_\mu\chi^\alpha\partial_\alpha f^i\right] + \varepsilon^{\mu\gamma}\partial_\mu\left[-\chi^\alpha\partial_\alpha f^i\right]\partial_\gamma f^k + \varepsilon^{\mu\gamma}\partial_\mu f^i\partial_\gamma\left[-\chi^\alpha\partial_\alpha f^k\right] = 0$$

e in definitiva

$$\varepsilon^{\mu\gamma}\partial_\gamma f^k\partial_\mu\chi^\alpha\partial_\alpha f^i + \varepsilon^{\mu\gamma}\partial_\mu f^i\partial_\gamma\chi^\alpha\partial_\alpha f^k = 0.$$

Un opportuno scambio di indici permette infine di scrivere

$$(\varepsilon^{\rho\gamma}\partial_\rho\chi^\mu - \varepsilon^{\mu\rho}\partial_\rho\chi^\gamma)\partial_\mu f^i\partial_\gamma f^k = 0 \quad .$$

Posto $\qquad z^{\mu\gamma} = \varepsilon^{\rho\gamma}\partial_\rho\chi^\mu - \varepsilon^{\mu\rho}\partial_\rho\chi^\gamma$

l'ultimo sistema si può scrivere

$$z^{\mu\gamma}\partial_\mu f^i\partial_\gamma f^k = 0$$

Se questo sistema si scrive nella forma

$$c^{\gamma i}\partial_\gamma f^k = 0$$

poiché esso ha $2n$ soluzioni f^k, risulta $c^{\gamma i} = 0$ cioé

$$z^{\mu\gamma}\partial_\mu f^i = 0$$

e poiché questo sistema a sua volta ha $2n$ soluzioni, risulta

$$z^{\mu\gamma} = 0$$

e cioé sono vere le (11') e, in definitiva, le (10).

Resta così dimostrata l'esistenza di h. Di conseguenza la (8) si può scrivere nella forma:

(3.12) $$(h,f) + \partial_t f = 0.$$

D'altra parte è ovvio che le soluzioni di questa equazione costituiscano un gruppo di funzioni di ordine $2n$ e quindi si ha:

Teorema. Condizione necessaria e sufficiente perché $2n$ funzioni indipendenti $f^i(\omega t)$ costituiscano una base di un gruppo di ordine $2n$, è che esista una funzione h tale che esse siano soluzioni della (12).

La funzione h sarà detta hamiltoniana del gruppo.

Se si esegue una trasformazione canonica

(3.15) $$\omega^{\mu} = \phi^{\mu}(\Omega t)$$

(3.16) $$\left\| \frac{\partial \phi^{\mu}}{\partial \Omega^{\gamma}} \right\| \neq 0$$

si ha (cfr. (9.3) del Cap. II)

(3.17) $$(\phi^{\mu} \phi^{\gamma})_{\Omega} = \varepsilon^{\mu\gamma}$$

e quindi le ϕ^{μ} costituiscono un gruppo di funzioni perché le loro PP sono funzioni (in questo caso costanti) delle ϕ stesse.

Per il teor. precedente esiste una funzione hamiltoniana, cioé una funzione $\mathcal{U}$ tale che

(3.18) $$(\mathcal{U} \phi^{\mu})_{\Omega} + \frac{\partial \phi^{\mu}}{\partial t} = 0 .$$

Applicando la (15) al sistema canonico

(3.19) $$\dot{\omega}^{\mu} = (h\ \omega^{\mu}) = \varepsilon^{\alpha\mu} \frac{\partial h}{\partial \omega^{\alpha}}$$

si ha, utilizzando la (17) e cioé ponendo $(\phi^{\alpha} \phi^{\mu})$ in luogo di $\varepsilon^{\alpha\mu}$:

$$\dot{\omega}^{\mu} = \frac{\partial \phi^{\mu}}{\partial \Omega^{\rho}} \dot{\Omega}^{\rho} + \frac{\partial \phi^{\mu}}{\partial t} = (\phi^{\alpha} \phi^{\mu}) \frac{\partial h}{\partial \omega^{\alpha}} =$$

$$= \varepsilon^{\rho\sigma} \frac{\partial \phi^{\alpha}}{\partial \Omega^{\rho}} \frac{\partial \phi^{\mu}}{\partial \Omega^{\sigma}} \frac{\partial \bar{h}}{\partial \Omega^{\beta}} \frac{\partial \Omega^{\beta}}{\partial \omega^{\alpha}}$$

dove $\bar{h}(\Omega t) = h(\omega t)$ è il trasformato di h.

Si ha dunque

$$\frac{\partial \phi^{\mu}}{\partial \Omega^{\rho}} \dot{\Omega}^{\rho} + \frac{\partial \phi^{\mu}}{\partial t} = \varepsilon^{\beta\sigma} \frac{\partial \phi^{\mu}}{\partial \Omega^{\sigma}} \frac{\partial \bar{h}}{\partial \Omega^{\beta}} = (\bar{h}, \phi^{\mu})_{\Omega} .$$

Utilizzando la (18) si ha

$$\frac{\partial \phi^{\mu}}{\partial \Omega^{\rho}} \dot{\Omega}^{\rho} - (\mathcal{U} \phi^{\mu}) - \varepsilon^{\beta\sigma} \frac{\partial \phi^{\mu}}{\partial \Omega^{\sigma}} \frac{\partial \bar{h}}{\partial \Omega^{\beta}}) = 0$$

e infine

$$\frac{\partial \phi^{\mu}}{\partial \Omega^{\rho}}(\dot{\Omega}^{\rho} - \varepsilon^{\beta\rho}\frac{\partial u}{\partial \Omega^{\beta}} - \varepsilon^{\beta\rho}\frac{\partial h}{\partial \Omega^{\beta}}) = 0$$

e per la (16)

$$(3.20) \qquad \dot{\Omega}^{\rho} = \varepsilon^{\beta\rho}\frac{\partial}{\partial \Omega^{\beta}}(\bar{h} + u) = (\bar{h} + u, \Omega^{\rho})_{\Omega} \equiv (H, \Omega^{\rho})_{\Omega}$$

Si ha quindi un sistema canonico nel quale il nuovo hamiltoniano è la somma dell'hamiltoniano trasformato $\bar{h}(\Omega t)$ più la funzione $u(\Omega t)$ che rappresenta la parte intimamente legata alla TC usata.

L'osservazione precedente permette di determinare l'hamiltoniana del sistema canonico trasformato del sistema (20).

Infatti per le (7.8) Cap. II si ha

$$(3.21) \qquad p_i = - \frac{\partial F}{\partial q^i}$$

dove F è la generatrice della (15). Ma, in generale come è facile riconoscere, si ha, per ogni funzione f:

$$(3.22) \qquad \frac{\partial f}{\partial p_i} = (f\ q^i) \ ; \quad \frac{\partial f}{\partial q^i} = -(f\ p_i)$$

e quindi dalla (21)

$$\frac{\partial p_i}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial F}{\partial q^i}) = - \frac{\partial}{\partial q^i}(\frac{\partial F}{\partial t}) = -(\frac{\partial F}{\partial t}, p_i)$$

Allo stesso risultato si perviene direttamente osservando che:

$$\frac{\partial p_i}{\partial t} = - \frac{\partial^2 F}{\partial q^i \partial q^k}[q(\bar{q}\ \bar{p}\ t), \bar{q}, t] \frac{\partial q^k}{\partial t} - \frac{\partial^2 F}{\partial q^i \partial t}$$

e

$$(\frac{\partial F}{\partial p}, p_i) = \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial p_k}\frac{\partial p_i}{\partial q_k} - \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial q^k}\frac{\partial p_i}{\partial p_k} = - \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial q^k}\delta^i_k =$$

$$= - \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial q^i} - \frac{\partial^2 F}{\partial q^k \partial q^i}\frac{\partial q^k}{\partial t}$$

Un calcolo diretto mostra poi che relazioni analoghe sono valide anche per le q^i, quando F sia espressa nelle sole variabili vecchie (o nelle sole variabili nuove, poiché la PP è invariante per TC).

In definitiva si ha tornando alla notazione compatta:

$$(3.23) \qquad \left(\frac{\partial F}{\partial t}, \omega^\mu \right) + \frac{\partial \omega^\mu}{\partial t} = 0 \quad .$$

Un sistema di equazioni del tipo:

$$(a, \omega^\mu) + \frac{\partial \omega^\mu}{\partial t} = 0 \qquad (\mu = 1 \ldots 2n)$$

nelle $2n$ incognite $\frac{\partial a}{\partial \omega^\gamma}$ $(\gamma = 1 \ldots 2n)$ può essere risolto con la regola di Cramer in virtù della (16). Poiché i sistemi (18) e (23) sono di questo tipo, per l'unicità della soluzione si ha

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \omega^\gamma} = \frac{\partial}{\partial \omega^\gamma} \left(\frac{\partial F}{\partial t} \right)$$

cioé

$$\mathcal{U} = \frac{\partial F}{\partial t} + G(t)$$

dove G è una funzione arbitraria del solo tempo.

E' chiaro che porre $G = 0$ non lede la generalità e quindi si ha in definitiva

$$(3.24) \qquad \mathcal{U}(QPt) = \frac{\partial F}{\partial t} (q\,Q\,t)$$

o anche

$$F(qQt) = \int_{t_0}^{t} \bar{\mathcal{U}} \quad (qQr)\,d\,r$$

dove t_0 è un valore qualunque.

Si ha quindi

$$(3.25) \qquad H(QPt) = h(qpt) + \frac{\partial F}{\partial t} \; .$$

La (24) può essere scritta

$$(3.24') \qquad \mathcal{U}(QPt) = \left(\frac{\partial}{\partial t_1} F \left[q(QPt), Q, t_1 \right] \right)_{t_1 = 1} \; .$$

Pertanto, data F, è facile risalire ad $\mathcal{U}$.

Viceversa, scritte le (15) esplicitamente

(3.26) $$q^i = \alpha^i(Q,P,t) \; ; \; p_i = \beta_i(Q,P\;t)$$

ricavando le $P(qQt)$ dalla prima n^{upla} e introducendole in $\mathcal{U}$ si ha:

$$\mathcal{U}(QPt) = \mathcal{U}^*(qQt)$$

e questa deve coincidere con $\dfrac{\partial F}{\partial t}$

$$\mathcal{U}^*(qQt) = \frac{\partial F}{\partial t}(qQt)$$

e quindi

(3.27) $$F(qQt) = \int_{t_0}^{t} \mathcal{U}^*(qQ\tau)\,d\tau$$

dove t_0 è un valore arbitrario.

In particolare se la (15) è tale che:

$$\mathcal{U}(QPt) = -\,\bar{h}(QPt)$$

si ha

$$H(QPt) = 0$$

e la funzione F corrispondente è la generatrice della trasformazione che interviene nel problema di Hamilton-Jacobi (v. Cap. IV n. 5).