CAPITOLO II

1. Premesse.

Sia $q^1 \dots q^r Z$, un sistema di coo dinate nello spazio R^{n+1} e sia

(1.1) $$Q^i \quad (qz) \qquad Z = \phi(qz)$$

una trasformaz one invert bile.

Sia poi $P_o \equiv (q_o z_o)$ un punto di una superficie regolare S^n di equazione cartesiana

(1.2) $$f(qz) = 0$$

La relazione

(1.3) $$dz - p_i dq^i = 0 \qquad \left(p_i = - \frac{\frac{\partial f}{\partial q^i}}{\frac{\partial f}{\partial z}} \right)$$

esprime l'ortogonalità fra lo spostamento (dq, dz) tangente alla superficie e il vettore $(p_i, -1)$.

La relazione (2), scritta nella forma:

(1.3') $$\frac{\partial f}{\partial q^k} dq^k + \frac{\partial f}{\partial z} dz = 0$$

sotto la trasformazione (1), che porta la (2) nella

(2') $$\bar{f}\,(QZ) = 0$$

(dove $\bar{f}\,(QZ) = f\,[q(\phi Z),\, z(\phi Z)],)$,

diventa

$$\left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial Q^r} \frac{\partial Q^r}{\partial q^k} + \frac{\partial \bar{f}}{\partial Z} \frac{\partial Z}{\partial q^k}\right) dq^k + \left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial Q^r} \frac{\partial Q^r}{\partial z} + \frac{\partial \bar{f}}{\partial Z} \frac{\partial Z}{\partial z}\right) dz = 0$$

cioé

$$(1.4) \qquad \frac{\partial \bar f}{\partial Q^r}\, dQ^r + \frac{\partial \bar f}{\partial Z}\, dz = 0$$

o anche, posto: $P_i = - \dfrac{\partial \bar f}{\partial Q^i} \Big/ \dfrac{\partial \bar f}{\partial Z}$.

$$(3'') \qquad dZ - P_i dQ^i = 0 \quad .$$

Inoltre, se

$$g(qz) = 0$$

è l'equazione di una seconda superficie Σ^n, e le S^n e Σ^n sono tangenti in P_o, cioé se

$$p_i = \frac{\partial f}{\partial q^i}\Big|_{P_o} = \lambda \frac{\partial g}{\partial q^i}\Big|_{P_o} \equiv \lambda p'_i ; \; p = \frac{\partial f}{\partial z}\Big|_{P_o} = \lambda \frac{\partial g}{\partial z}\Big|_{P_o} \equiv p'$$

dalle relazioni

$$P_k = \frac{\partial \bar f}{\partial Q^k} = \frac{\partial f}{\partial q^i}\frac{\partial q^i}{\partial Q^k} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial Q^k} = p_i \frac{\partial q^i}{\partial Q^k} + p\,\frac{\partial z}{\partial Q^k}$$

e analoghe, si ha, con notazioni ovvie:

$$P_k = \lambda P'_k \; ; \qquad P = \lambda P'$$

e quindi le superfici trasformate $\bar S^n$ e $\bar\Sigma^n$ sono pur esse tangenti fra loro.

2. Trasformazioni di contatto.

Ci si può porre un problema più generale del precedente. Sia dato in R^{n+1} un campo di vettori covarianti $p_i = p_i(qz)$ $(i = 1\ldots n)$, $p = -1$. Sia assegnata, poi la trasformazione, più generale, della (1).

$$(2.1) \qquad \begin{cases} Q^i = \phi^i(q\,z\,p) \; ; & P_i = \psi_i(q\,z\,p) \\ Z = \phi(q\,z\,p) & (i = 1\ldots n) \end{cases}$$

Si vuole sapere sotto quali condizioni la relazione

$$dz - p_i dq^i = 0 \tag{2.2}$$

implica necessariemente la relazione

$$dZ - P_i dQ^i = 0 \ . \tag{2.3}$$

In forza della (1) il primo membro della (3) è della forma:

$$dZ - P_i dQ^i = a\ d\ z + b_i dq^i + c^i dp_i \tag{2.4}$$

dove le a,b,c sono funzioni di z,qp.

In virtù della (2), la (4) si può scrivere

$$dZ - P_i dQ^i = (ap_i + b_i) dq^i + c^i dp_i$$

che, stante l'indipendenza delle dq^i, dp_i, è nulla se e solo se

$$ap_i + b_i = 0 \qquad c^i = 0 \ .$$

La (4) si riduce quindi:

$$dZ - P_i dQ^i = a(dz - p_i dq^i) \tag{2.5}$$

(sostanzialmente a è un moltiplicatore di Lagrange).

Se $p_i = \frac{\partial f}{\partial q^i}$ dove f è una funzione delle $q^1 \ldots q^n$, le (2) rappresentano l'ortogonalità fra lo spostamento tangente alla superficie S di equazione $z = f(q)$ e il vettore $(p_i, -1)$.

Le p_i sono allora funzioni di q,z e sostituendo queste funzioni nelle Φ^i, Φ ed eliminando le q si ottiene una equazione $Z = F(Q)$. Le P_i, in virtù delle (3), sono ortogonali a questa superficie. E' evidente che due superfici, tangenti nella rappresentazione qz, si mantengono tangenti nella rappresentazione QZ.

Una trasformazione (1), per la quale sussista la (5), è detta <u>trasformazione di contatto non omogenea.</u>

Se nello spazio R^{n+1} si trattano tutte le $n+1$ variabili simmetricamente, conviene scrivere le (1) nella forma:

$$(2.1') \qquad Q^i = \phi^i(qp) \; ; \qquad P_i = \Psi_i(qp) \qquad i = 1 \ldots n+1$$

introducendo uno $(n+1)^{mo}$ componente $\neq -1$ del vettore covariante p. In questo caso il procedimento già seguito porta a scrivere la (5) nella forma:

$$p_i dq^i = a \, P_i \, dQ^i$$

e in questa conviene prendere $a = 1$, cambiando per es. la scala dei vettori P_i.

Una trasformazione (1') che soddisfi la relazione

$$(2.6) \qquad p_i \, dq^i = P_i dQ^i$$

è detta <u>trasformazione di contatto omogenea.</u>

La trasformazione non omogenea può pure essere caratterizzata dalla (5) nella quale si divida per a, e si ponga

$$-P_i \to \frac{P_i}{a} \; ; \quad -p_i \to \frac{p_i}{a} \qquad Z = q^{n+1}$$

Con ciò si ha:
$$P_i dQ^i = - dq^{n+1} - p_\alpha dq^\alpha \qquad (\alpha = 1 \ldots n) \, .$$

Sostanzialmente non vi è quindi differenza fra trasformazioni di contatto omogenee e quelle non omogenee: si tratta di due descrizioni diverse della stessa situazione, dove, nel primo caso, le variabili sono trattate simmetricamente, mentre, nel secondo caso, una variabile viene isolata dalle altre. Tuttavia è conveniente trattare separatamente le due forme della trasformazione perché le trasformazioni omogenee si prestano a una trattazione più semplice che può essere utilizzata per le trasformazioni non omogenee.

3. Trasformazioni di contatto omogenee.

Si consideri la trasformazione (2.1) .

$$Q^i = \phi^i(qp) \; ; \qquad P_i = \psi_i(qp) \tag{3.1}$$

per la quale sussista la (2.6)

$$P_i dQ^i = p_i dq^i \quad . \tag{3.2}$$

Esplicitando mediante le (1) si ha

$$\psi_k \left(\frac{\partial \phi^k}{\partial q^i} dq^i + \frac{\partial \phi^k}{\partial p_i} dp_i \right) = p_i dq^i \tag{3.3}$$

Per l'indipendenza dei differenziali dq^i, dp_i si ha come condizione necessaria e sufficiente per la validità di (3)

$$\psi_k \frac{\partial \phi^k}{\partial q^i} = p_i \qquad ; \qquad \psi_k \frac{\partial \phi^k}{\partial p_i} = 0 \quad . \tag{3.4}$$

Se le ψ_k non sono tutte nulle, la matrice $\left| \frac{\partial \phi^k}{\partial p_i} \right|$ è singolare. Sia $n-r$ il suo rango. Allora fra le ϕ^k, considerate come funzioni delle p, sussistono r relazioni non contenenti queste variabili. Tali relazioni dipendono invece in generale, come è ovvio, dalle q.

$$F_\alpha(q^1 \ldots q^n, \phi^1 \ldots \phi^n) = 0 \qquad (\alpha = 1 \ldots r)$$

o anche

$$F_\alpha(q^1 \ldots q^n; Q^1 \ldots Q^n) = 0 \tag{3.5}$$

In base alla (2) i $2n$ differenziali dq^i, dQ^k non sono indipendent Il numero dei differenziali indipendenti si ricava dal numero delle F .

Differenziando le (5) si ha

$$\frac{\partial F_\alpha}{\partial q^i}\, dq^i + \frac{\partial F_\alpha}{\partial Q^i}\, dQ^i = 0 \tag{3.6}$$

La (2) è conseguenza delle (6)e costituisce con queste un sistema algebrico di $r+1$ equazioni nelle $2n$ incognite dq^i, dQ^i. Esiste dunque una combinazione lineare nulla delle righe della matrice del sistema:

$$P_i - \rho^\alpha \frac{\partial F_\alpha}{\partial Q^i} = 0 \; ; \; - p_i - \rho^\alpha \frac{\partial F_\alpha}{\partial q^i} = 0 \quad . \tag{3.7}$$

Queste relazioni esprimono i vettori p, P come trasformati l'uno dell'altro.

Si consideri il sistema di n equazioni lineari nelle r incognite ρ^α:

$$\frac{\partial F_\alpha}{\partial q^i}\, \rho^\alpha = - p_i \quad . \tag{3.8}$$

Il suo rango è r. Infatti il rango della matrice $\left|\frac{\partial F}{\partial Q^i}\right|$ è r in virtù del secondo sistema (3.4) e quindi il primo sistema (7) ammette r soluzioni indipendenti ρ^α. Le ρ^α indipendenti sono in numero di r anche per il secondo sistema se e solo se $\left|\frac{\partial F}{\partial q^i}\right|$ è anch'essa di rango r.

Risolvendo allora r equazioni del sistema (8) corrispondenti ad un minore non singolare di ordine r, si ricavano le ρ^α che sono quindi funzioni lineari di r delle p. Introducendo poi queste espressioni nelle restanti equazioni del sistema (8) si ottengono $n-r$ relazioni fra le qQp, lineari e omogenee nelle p. Accoppiando queste $n-r$ relazioni alle r relazioni (5) e risolvendo questo complesso di n equazioni rispetto alle Q^i, si ottengono le ϕ^i. Ma poiché le $n-r$ equazioni (5) coinvolte contengono le p_i, in forma lineare e omogenea, le Q^i contengono le p_i solo per il tramite dei rapporti di queste ultime: le ϕ^i

sono quindi omogenee di grado zero nelle p e cioé

$$p_k \frac{\partial \phi^i}{\partial p_k} = 0 \qquad (i = 1 \ldots n) \quad . \tag{3.9}$$

Inoltre dal primo sistema (7): $P_i = \rho^\alpha \frac{\partial F_\alpha}{\partial Q^i}$ · poiché le p sono contenute solo nelle ρ^α e vi sono contenute linearmente, si vede che le $\Psi_i (\equiv P_i)$ sono lineari omogenee nelle p_i.

Perché il sistema $\Psi_i \frac{\partial \phi^i}{\partial q^k} = p_k$ ammetta soluzione unica la matrice $\left|\frac{\partial \phi^i}{\partial q^r}\right|$ deve avere rango massimo.

Sotto questa ipotesi ricavando le Ψ dal primo sistema (4)

$$\Psi_i = \frac{\left|\frac{\partial \phi}{\partial q}\right|^i}{\left|\frac{\partial \phi}{\partial q}\right|}$$

($\left|\frac{\partial \phi}{\partial q}\right|^i$ indica che la i^{ma} colonna della matrice $\left|\frac{\partial \phi}{\partial q}\right|$ è stata sostituita con la colonna delle p_i) e ponendole nel secondo si ha

$$\frac{\partial \phi^i}{\partial p_k} \cdot \frac{\left|\frac{\partial \phi}{\partial q}\right|^i}{\left|\frac{\partial \phi}{\partial q}\right|} = 0$$

ossia

$$\frac{\partial \phi^i}{\partial p_k} \left|\frac{\partial \phi}{\partial q}\right|^i = 0$$

e questo è lo sviluppo, secondo la prima riga, del determinante .

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial\phi^1}{\partial p_k} & \cdots & \dfrac{\partial\phi^n}{\partial p_k} & 0 \\ \dfrac{\partial\phi^1}{\partial q^1} & \cdots & \dfrac{\partial\phi^n}{\partial q^1} & p_1 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \\ \dfrac{\partial\phi^1}{\partial q^n} & \cdots & \dfrac{\partial\phi^n}{\partial q^n} & p_n \end{vmatrix} = 0$$

Di conseguenza si ha:

$$\frac{\partial\phi^j}{\partial p_k} = \lambda^{kr} \frac{\partial\phi^j}{\partial q^r} \; ; \quad \lambda^{kr} p_r = 0 \tag{3.9}$$

Il sistema differenziale

$$\frac{\partial\phi^j}{\partial p_k} = \lambda^{kr} \frac{\partial\phi^j}{\partial q^r} \tag{3.10}$$

è integrabile se e solo se le λ^{kr} sono simmetriche negli indici. (La dimostrazione viene lasciata come esercizio).

Moltiplicando allora per $\frac{\partial\phi^\ell}{\partial q^k}$ si ha

$$\frac{\partial\phi^j}{\partial p_k} \frac{\partial\phi^\ell}{\partial q^k} = \lambda^{km} \frac{\partial\phi^j}{\partial q^m} \frac{\partial\phi^\ell}{\partial q^k}$$

e analogamente

$$\frac{\partial\phi^j}{\partial q^k} \frac{\partial\phi^\ell}{\partial p_k} = \lambda^{km} \frac{\partial\phi^j}{\partial q^k} \frac{\partial\phi^\ell}{\partial q^m} \; .$$

Per la simmetria delle λ si ha sommando

$$(\phi^j \phi^\ell) \equiv \frac{\partial\phi^j}{\partial p^k} \frac{\partial\phi^\ell}{\partial q^k} - \frac{\partial\phi^j}{\partial q^k} \frac{\partial\phi^\ell}{\partial p_k} = 0 \tag{3.11}$$

che sono ancora condizioni di integrabilità del sistema (10). Le (ϕ^j, ϕ^ℓ) sono dette parentesi di Poisson (PP).

Siano date, viceversa, n funzioni $\phi^i(qp)$. Si riconosce che esse individuano una trasformazione di contatto omogenea se soddisfano le tre condizioni:

a) le ϕ sono omogenee di grado zero nelle p: $p_i \dfrac{\partial \phi^j}{\partial p_i} = 0$

b) la matrice $\left| \dfrac{\partial \phi}{\partial q} \right|$ è non singolare

c) le PP delle ϕ sono nulle.

Siano infatti $\Psi_1 \ldots \Psi_n$ n soluzioni del sistema

$$\text{d)} \qquad \Psi_k \frac{\partial \phi^k}{\partial q^i} = p_i \qquad \left(\left| \frac{\partial \phi^k}{\partial p^i} \right| \neq \quad \text{per la b)} \right)$$

allora, essendo per le c)

$$\Psi_i (\phi^i \phi^\ell) = 0$$

si ha, usando le condizioni d) e a) e la (4):

$$\Psi_i \frac{\partial \phi^i}{\partial p_k} \frac{\partial \phi^\ell}{\partial q^k} = \Psi_i \frac{\partial \phi^i}{\partial q^k} \frac{\partial \phi^\ell}{\partial p_k} = p_k \frac{\partial \phi^\ell}{\partial p_k} = 0$$

ossia

$$(\Psi_i \frac{\partial \phi^i}{\partial p_k}) \frac{\partial \phi^\ell}{\partial q^r} = 0 \quad .$$

La condizione b) assicura che questo sistema possiede solo la soluzione nulla,

$$\Psi_j \frac{\partial \phi^j}{\partial p_k} = 0$$

e quindi le Ψ soddisfano anche la seconda delle condizioni (3.4).

Si ha così:

Condizione necessaria e sufficiente perché un sistema di funzioni ϕ^i determini una trasformazione di contatto omogenea per la quale le Ψ siano univocamente determinate è che siano soddisfatte le condizioni a)b)c) .

4. Interpretazione geometrica.

Si consideri il caso in cui esiste una sola equazione (3.5)

$$F(q,Q) = 0 \tag{4.1}$$

E' conveniente introdurre gli spazi R^n ed $\bar{R}^n$ dove $A(q) \in R^n$ e $\bar{A}(Q) \in \bar{R}^n$.

Assegnata una n^{pla} di valori q_o delle q, cioé un punto $A_o \in R^n$, la (1) è l'equazione di una varietà $(n-1)$ dimensionale $\bar{\Sigma}_{A_o} \subset \bar{R}^n$: tutti i punti di $\bar{\Sigma}_{A_o}$ corrispondono, mediante la (1), a P. Volendo scegliere, fra i punti di $\bar{\Sigma}_{A_o}$ un punto determinato, è necessario associare al punto A_o un vettore $\vec{p}_o$.

Questo si può vedere in base alla discussione fatta nel n° precedente direttamente dalle (2.1'). Le relazioni (2.1')

$$\begin{cases} Q^i = \phi^i(qp) \\ P_i = \Psi_i(qp) \end{cases} \tag{4.2}$$

quando sussiste la (2.6), implicano la (4.1). Ciò vuol dire che, posto $q = q^\circ$ nelle (4.2), al variare delle p, le prime n delle (4.2) forniscono la $\bar{\Sigma}_{A_o}$, mentre la seconda n^{pla} fornisce certi vettori $\vec{P}$ applicati nei punti di $\bar{\Sigma}_{A_o}$. Un punto particolare $\bar{A}_o$ sulla varietà $\bar{\Sigma}_{A_o}$ si ottiene introducendo nelle (4.2) accanto alle q_o, le componenti di un vettore $\vec{p}_o$ (applicato in A_o). In forza delle (3.7), che ora si riducono a

$$p_i = - \rho \frac{\partial F}{\partial q^i} \; ; \qquad P_i = \rho \frac{\partial F}{\partial Q^i} \tag{4.3}$$

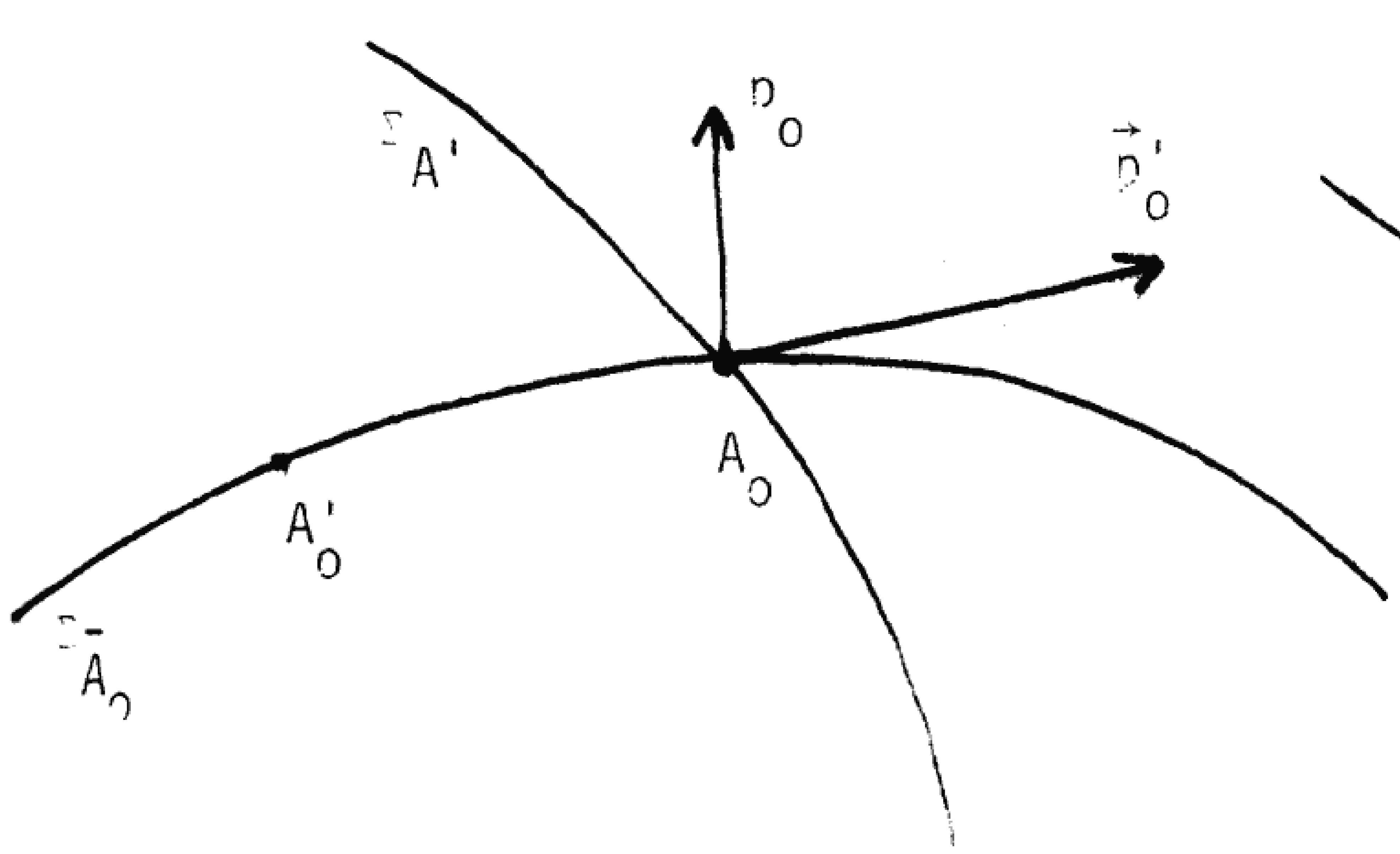
il vettore $\vec{P}_o(q_o p_o)$ è ortogonale a $\bar{\Sigma}_{A_o}$ nel punto $\bar{A}_o(q_o,p_o)$.

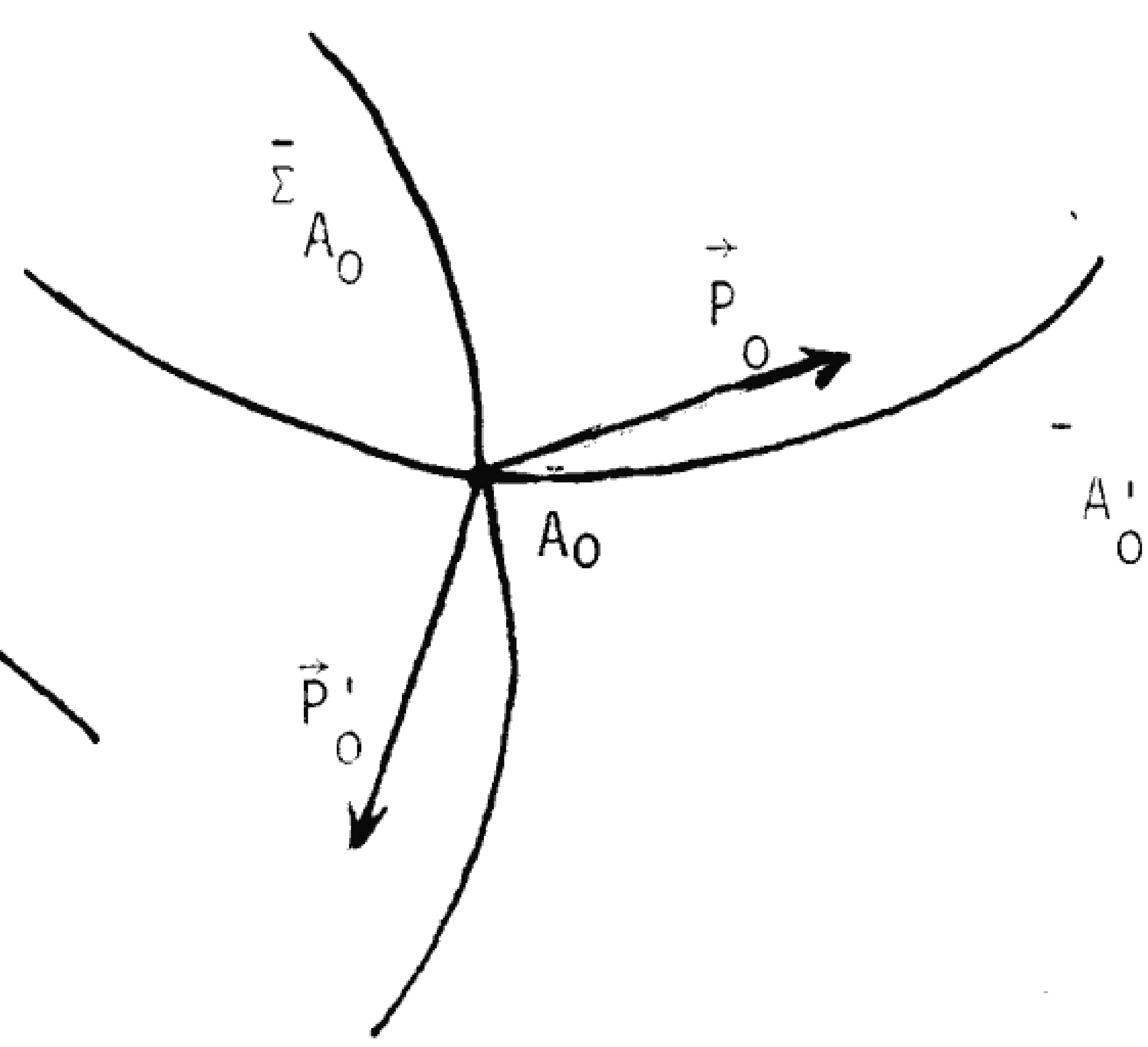
In tal modo le (4.2) fanno corrispondere all'elemento (n-1) dimensionale $(q,p) \equiv V_{n-1} \subset R^n$, l'elemento (n-1) dimensionale $(Q,P) \equiv \bar{V}_{n-1} \subset \bar{\Sigma}_A$.

D'altra parte la (1) fa corrispondere a $\bar{A}_o$ una superficie $\Sigma_{\bar{A}_o}$, ovviamente passante per A_o e se in $\bar{A}_o$ si applica proprio il vettore $\vec{P}_o$ precedentemente considerato, mediante le (2) si risale, oltre che al punto $A_o \in \Sigma_{\bar{A}_o}$, anche al vettore $\vec{p}_o$ precedentemente considerato, il quale, in virtù delle (3) è ortogonale a $\Sigma_{\bar{A}_o}$ in A_o.

Un altro punto $\bar{A}' \in \bar{\Sigma}_{A_o}$ dà luogo, mediante la (1), ad una superficie $\Sigma_{\bar{A}'}$ pur essa contenente A_o e diversa da $\Sigma_{\bar{A}_o}$. La superficie $\Sigma_{\bar{A}'}$, ha in A_o una normale covariante p' che è legata dalle (2) alla normale portata a $\bar{\Sigma}_{A_o}$ in $\bar{A}'$.

Così per P_o passano infinite superfici date dalla (1)ognuna corrispondente ad un diverso punto di $\bar{\Sigma}_A$ ed aventi in A_o normali diverse. E' ovvio viceversa che, ad es., per $\bar{A}_o$ passano infinite superfici, ognuna corrispondente ad un diverso punto di $\Sigma_{\bar{A}_o}$ e aventi normali covarianti diverse.





(vedere l'identica discussione nel n° 5 del Cap. VI: tale discussione poggia sulla (3.12) dello stesso capitolo e questa formula è analoga alla (2.6) del capitolo presente).

Sia assegnata ora in R^n una superficie S di equazione $f(q) = 0$. Ad ogni punto $A_0 \in S$ la (1) associa in $\bar{R}^n$ una superficie $\bar{\Sigma}_{A_0}$. Come si è visto or ora, per individuare, mediante le (1) un punto particolare in $\bar{\Sigma}_{A_0}$ occorre dare un vettore $\vec{p}_0$. Si scelga il vettore

$$p_i = \lambda \frac{\partial f}{\partial q^i}$$

e sia $\bar{A}_0$ il punto di $\bar{\Sigma}_{A_0}$ corrispondente a $\vec{p}_0$. A $\bar{A}_0$ corrisponde in R^n una superficie $\Sigma_{\bar{A}_0}$ con la seguente proprietà: la normale a $\Sigma_{\bar{A}_0}$ in A_0 ha la direzione di $\vec{p}_0$ e quindi è normale ad S.

In tal modo che (2) associano al punto $A_0 \in S$ una superficie della famiglia (1) che è tangente ad S in A_0. Poiché ciò si può ripetere per tutti i punti di S, si conclude che dalla famiglia (1), riguardata come una famiglia di superfici negli n parametri Q, si può estrarre una famiglia parziale della quale ogni membro è tangente ad S in un punto. La superficie S è quindi l'inviluppo di questa famiglia parziale.

Le componenti $p_i = \lambda \frac{\partial f}{\partial q^i}$ delle normali ad S sono funzioni delle coordinate del punto di applicazione: $p_i = p_i(q)$. Introducendo queste funzioni nelle (2) si ottengono le n funzioni $Q^i = \phi^i[q, p(q)]$. Al variare di A su S si ottiene allora una superficie $\bar{S}$ la quale, essendo le q vincolate dalla relazione $f(q) \equiv 0$, è la trasformata di S. Se ci si sposta su $\bar{S}$ si ha

$$dQ^i = \left(\frac{\partial \phi^i}{\partial q^k} + \frac{\partial \phi^i}{\partial p_r} \frac{\partial p_r}{\partial q^k}\right) dq^k$$

dove le dq^k sono prese lungo S, e cioé sono tali che

$$\frac{\partial f}{\partial q^k}\, dq^k = 0 \, .$$

Moltiplicando le precedenti per P_i si ha

$$P_i dQ^i = P_i \frac{\partial \phi^i}{\partial q^k}\, dq^k + P_i \frac{\partial \phi}{\partial p_r} \frac{\partial p_r}{\partial q^k}\, dq^k \, .$$

Ma per le (3.4) è $P_i \dfrac{\partial \phi^i}{\partial p_r} = 0$; $P_i \dfrac{\partial \phi}{\partial q^k} = p_k$

e quindi

$$(4.4) \qquad P_i dQ^i = p_i dq^i = 0$$

Detta $\bar{f}(Q) = 0$ l'equazione di $\bar{S}$, poiché le dQ^k sono spostamenti tangenti a $\bar{S}$, le P_i che per le (4) sono ad essi normali, sono del tipo

$$P_i = \mu \frac{\partial \bar{f}}{\partial Q^i}$$

Si scelga ora su S un punto A_o e sia $\bar{\Sigma}_{A_o}$ la solita superficie in $\bar{R}^n$. Si prenda ancora su $\bar{\Sigma}_{A_o}$ il punto $\bar{A}_o$ corrispondente a $p_i = \mu \left.\dfrac{\partial f}{\partial q^i}\right|_{P_o}$.

Allora all'elemento di S $\left(A_o, \left.\dfrac{\partial f}{\partial q^i}\right|_o\right)$ corrisponde su $\bar{\Sigma}_{A_o}$, come si è detto in precedenza l'elemento $(\bar{A}_o, P_i = \mu \dfrac{\partial \bar{f}}{\partial Q^i})$. Perciò le normali a $\bar{\Sigma}_{A_o}$ e ad $\bar{S}$ in $\bar{A}_o$ sono parallele e le due superfici sono tangenti in $\bar{A}_o$. Ripetendo ciò per tutti i punti di $\bar{S}$, si vede che questa superficie è inviluppo di una famiglia parziale di superfici $\bar{\Sigma} \subset \bar{R}^n$, appartenente alla famiglia di superfici (1) negli n parametri q.

E' evidente la simmetria fra gli spazi R^n e $\bar{R}^n$.

Se le equazioni (3.5) sono in numero di r, esse definiscono una varietà ad $n-r$ dimensioni. Quindi un punto $A \in R^n$ ha come trasformato un $\bar{R}^n$ tutta una varietà $(n-r)$ dimensionale $\bar{\Sigma}_p(n-r)$. Preso in A un vettore covariante p_i, le n equazioni $Q^i = \phi^i(qp)$ individuano su $\bar{\Sigma}_A^{\,n-r}$ un punto determinato $\bar{A}$. Le restanti equazioni $P_i = \Psi_i(qp)$ associano in $\bar{A}$ una normale covariante a $\bar{\Sigma}_P^{\,n-r}$: infatti ogni spostamento su $\bar{\Sigma}_A^{\,n-r}$ in $\bar{A}$ soddisfa alla relazione $\frac{\partial F}{\partial Q^i} dQ^i = 0$ ossia $\rho^\alpha \frac{\partial F_\alpha}{\partial Q^i} dQ^i = 0$; di conseguenza per le (3.7) è $P_i dQ^i = 0$. Perciò P_i è, come si è detto, normale a $\bar{\Sigma}_P^{\,n-r}$.

Come per il caso $r=1$, assegnata una superficie $f(q) = 0$ e determinata la sua trasformata $\bar{f}(q) = 0$ (dove nelle $Q^i = \phi^i(qp)$, in luogo delle p si pongano le $\frac{\partial f}{\partial q^i}$ calcolate su S), la $\bar{S}$, in ogni suo punto, è tangente ad una $\bar{\Sigma}^{\,n-r}$ in un punto opportuno di questa.

Infine una discussione analoga si può fare partendo, anziché da una superficie S assegnata di equazione $f(q) = 0$, da una varietà ad un numero minore di dimensioni, dato da s equazioni

$$f_i(q) = 0 \qquad (i = 1 \dots s < n) .$$

In tutta la discussione precedente è fondamentale il fatto che le ϕ, come funzioni delle p, siano fra loro dipendenti: tale dipendenza implica che, fissate le q^i nelle (2), al variare delle p si ottengono punti Q^i non arbitrari, ma appartenenti ad una Σ.

5. Proprietà delle trasformazioni di contatto omogenee.

La discussione precedente può essere invertita: si riconosce in tal modo che l'esistenza delle varietà F_α del n° precedente ha un ruolo di condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza di una trasformazione di contatto omogenea.

Siano assegnate r equazioni:

$$F_\alpha(qQ) = 0 \qquad (\alpha = 1 \dots r) \tag{5.1}$$

e si supponga che le F, come funzioni delle q, siano indipendenti, e cioé il rango della matrice $\left|\frac{\partial F_\alpha}{\partial q}\right|$ sia r.

In corrispondenza ad ogni n^{pla} di valori delle Q, le (1) sono le equazioni di una varietà ad $n-r$ dimensioni. Per individuare le normali a tale varietà, si osservi che, indicando con dq^i $(i = 1....n)$ uno spostamento tangente a queste varietà, la normale deve soddisfare alla relazione:

$$p_i dq^i = 0 \tag{5.2}$$

In altri termini il vettore di componenti p_i deve essere normale al vettore di componenti dq^i tutte le volte che questo ultimo soddisfa alle relazioni (1), ossia alle relazioni

$$\frac{\partial F_\alpha}{\partial q^i}\, dq^i = 0 \qquad (\alpha = 1...r) \tag{5.3}$$

o ancora sotto la condizione che le dq^i siano legate dalle (3). Applicando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange si vede che i vettori normali alla varietà sono tutti e soli della forma:

$$p_i = \lambda_\alpha \frac{\partial F_\alpha}{\partial q^i} \quad . \tag{5.4}$$

Le $n+r$ equazioni (1) e (4) costituiscono un sistema nelle $n+r$ incognite $Q^1...Q^n$, $\lambda_1...\lambda_r$. Poiché valori arbitrari delle λ forniscono sempre normali alle varietà (1) è chiaro che tali parametri non hanno un particolare interesse e conviene eliminarli fin dall'inizio. In effetti il sistema (4) è equivalente al sistema di equazioni ottenute uguagliando a zero i minori di ordine $r+1$ della matrice

$$
\begin{vmatrix}
\frac{\partial F_1}{\partial q^1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial q^n} \\
\frac{\partial F_r}{\partial q^1} & \dots & \frac{\partial F_r}{\partial q^n} \\
p_1 & \dots & p_n
\end{vmatrix}
$$

Naturalmente delle $\binom{n}{r+1}$ equazioni che in tal modo si ottengono interessano unicamente quelle alle quali si perviene uguagliando a zero i soli $n-r$ minori contenenti un minore di rango r della matrice $\left|\frac{\partial F_\alpha}{\partial q^i}\right|$: tali equazioni sono, con notazione ovvia, della forma:

$$
(5.5) \qquad \begin{vmatrix}
\frac{\partial F_1}{\partial q^{i_1}} & & \frac{\partial F_1}{\partial q^{i_r}} & \frac{\partial F_1}{\partial q^k} \\
\frac{\partial F_r}{\partial q^{i_1}} & & \frac{\partial F_r}{\partial q^{i_r}} & \frac{\partial F_r}{\partial q^k} \\
p_{i_1} & & p_{i_r} & p_k
\end{vmatrix} = 0 \qquad (k \neq i_1, \dots i_r)
$$

e sono pertanto lineari omogenee nelle p. Ogni eventuale soluzione $\phi^1(qp) \dots \phi^n(qp)$ è quindi omogenea di grado zero nelle p.

Il sistema (1) (5) è risolubile rispetto alle Q se le F_α sono indipendenti come funzioni di tali variabili cioé se la matrice $\left|\frac{\partial F_\alpha}{\partial Q^i}\right|$ ha rango r. Queste soluzioni siano:

$$
(5.6) \qquad Q^i = \phi^i(qp) .
$$

Riintroducendo le (6) nelle (1) si ottengono delle identità. Derivando queste identità si ha:

$$(5.7)\qquad \frac{\partial F_\alpha}{\partial q^i} + \frac{\partial F_\alpha}{\partial Q^k}\frac{\partial \phi^k}{\partial q^i} = 0;\quad \frac{\partial F_\alpha}{\partial Q^k}\frac{\partial \phi^k}{\partial p_i} = 0$$

Sostituendo le (6) nelle (4) si ricavano certe funzioni $\bar\lambda_\alpha$. Posto

$$(5.8)\qquad \Psi_i = -\bar\lambda_\alpha \frac{\partial F_\alpha}{\partial Q^i}$$

si vede che le Ψ_i in virtù delle (7) soddisfano le seconde delle (3.4) e quindi le funzioni $\phi^i\ \Psi_i$ individuano una trasformazione di contatto omogenea.

La condizione sufficiente perché ciò avvenga è che il sistema (1) (4) sia risolubile rispetto al complesso delle variabili Q,λ, cioé che la matrice

$$(5.9)\qquad \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial Q^1} & & \dfrac{\partial F_2}{\partial Q^n} & 0 \ldots & & 0 \\ \\ \dfrac{\partial F_r}{\partial Q^1} & & \dfrac{\partial F_r}{\partial Q^n} & 0 \ldots & & 0 \\ \lambda_\alpha \dfrac{\partial^2 F_\alpha}{\partial q^1 \partial Q^1} & \ldots & \lambda_\alpha \dfrac{\partial^2 F_\alpha}{\partial q^1 \partial Q^n} & \dfrac{\partial F_1}{\partial q^1} & \ldots & \dfrac{\partial F_r}{\partial q^1} \\ \lambda_\alpha \dfrac{\partial^2 F_\alpha}{\partial q^n \partial Q^1} & \ldots & \lambda_\alpha \dfrac{\partial^2 F_\alpha}{\partial q^n \partial Q^n} & \dfrac{\partial F_1}{\partial q^n} & \ldots & \dfrac{\partial F_r}{\partial q^n} \end{vmatrix} \equiv \Delta$$

abbia rango $n+r$ (per ogni valore delle λ, i cui valori numerici come si è detto, sono irrilevanti, perché ogni loro r^{upla} individua una normale alla varietà (1)). D'altra parte come si vede da uno sviluppo esplicito, il non annullarsi della matrice (9) implica che le matrici $\left|\frac{\partial F_\alpha}{\partial q^k}\right|$ e $\left|\frac{\partial F_\alpha}{\partial Q^k}\right|$ abbiano entrambre rango r.

In conclusione:
Date r funzioni F_α di $2n$ variabili Q^i e q^i tali che la matrice Δ data dalla (9) sia non singolare sulla varietà $F_\alpha = 0$ per tutti i valori delle λ, le equazioni (6) e (8), individuano una trasformazione di contatto omogenea.

Per una trasformazione di contatto (2.1') le condizioni precedenti, relative alle (3.5) sono necessariamente soddisfatte. Dalla simmetria della matrice (9) segue che, scambiando il ruolo delle q e delle Q nella discussione del presente numero si ottiene una trasformazione di contatto

$$q^i = \bar{\phi}(QP) \; ; \qquad p_i = \bar{\Psi}_i(QP) \; . \tag{5.10}$$

Questa trasformazione è l'inversa della (2.1'), come è evidente.
Inoltre prese due trasformazioni di contatto

$$q^i = \bar{\phi}^i(QP) \quad ; \qquad p_i = \Psi_i(QP)$$
$$\xi^i = \pi^i(qp) \quad ; \qquad \eta_i = \sigma_i(qp)$$

dalle relazioni

$$p_i dq^i = P_i dQ^i \qquad \text{e} \qquad \eta_i d\,\xi^i = p_i dq^i$$

segue

$$P_i dQ^i = \eta_i d\,\xi^i$$

e quindi anche la trasformazione $PQ \to \xi\,\eta$ è una trasformazione di contatto.

Poiché la trasformazione identica $Q^i = q^i$; $P_i = p_i$ è certamente una trasformazione di contatto omogenea, il complesso delle trasformazioni di contatto omogenee ha le proprietà:

1) la composizione di due trasformazioni di contatto è una trasformazione di contatto
2) ogni trasformazione di contatto ammette una trasformazione inversa, che è pur essa una trasformazione di contatto
3) esiste la trasformazione di contatto identica.

Di conseguenza il complesso delle trasformazioni di contatto omogenee in $2n$ variabili costituisce un gruppo.

Naturalmente per la trasformazione (10) si hanno le analoghe delle (3.4)

$$(5.11) \qquad p_i \frac{\partial q^k}{Q^k} = p_r \qquad ; \qquad p_i \frac{\partial q^i}{\partial P_k} = 0 \ .$$

Derivando le prime rispetto a Q^j si ha

$$\frac{\partial p_i}{\partial Q^j} \frac{\partial q^i}{\partial Q^k} - \frac{\partial p_i}{\partial Q^k} \frac{\partial q^i}{\partial Q^j} = 0$$

o, indicando il primo membro con $\{Q^j, Q^k\}$

$$(5.12) \qquad \{Q^j, Q^k\} = 0 \quad .$$

L'espressione $\{Q^j, Q^k\}$ è detta la parentesi di Lagrange (PL) delle quantità Q^j, Q^k.

Dalle seconde delle (11) si ha analogamente:

$$(5.13) \qquad \{P_j, P_k\} = 0$$

Infine derivando le prime rispetto alle P_j e le seconde rispetto alle Q^k sottraendo (1).

(1) osservare che nelle equazioni delle PL la covarianza è rovesciata. Infatti le PL sono soltanto dei simboli.

(5.14) $$\{P_j, Q^k\} = \delta_j^k$$

Per 2n funzioni $u^1 \ldots u^{2n}$ fra loro indipendenti, si hanno le relazioni

$$\frac{\partial q}{\partial u^{\alpha}} \frac{\partial u^{\alpha}}{\partial q^k} = \delta_k^i \quad ; \quad \frac{\partial p_i}{\partial u^{\alpha}} \frac{\partial u^{\alpha}}{\partial p_k} = \delta_i^k \; ;$$

$$\frac{\partial q^i}{\partial u^{\alpha}} \frac{\partial u^{\alpha}}{\partial p_k} = 0 = \frac{\partial p_i}{\partial u^{\alpha}} \frac{\partial u^{\alpha}}{\partial q^k}$$

e analogamente

$$\frac{\partial u^{\alpha}}{\partial q^{\sigma}} \frac{\partial q^{\sigma}}{\partial u^{\beta}} + \frac{\partial u^{\alpha}}{\partial p_{\sigma}} \frac{\partial p_{\sigma}}{\partial u^{\beta}} = \delta_{\beta}^{\alpha}$$

Usando queste relazioni è facile ricavare la relazione che sussiste fra le PL e le PP dalle 2n funzioni u. Si ha, scrivendo esplicitamente le somme:

$$\sum_{\alpha=1}^{n} (u^{\alpha} u^{\beta})\{u^{\alpha}\ u^{\gamma}\} =$$

$$= \sum_{\alpha,\kappa,\sigma} \left(\frac{\partial u^{\alpha}}{\partial p_k} \frac{\partial u^{\beta}}{\partial q^k} - \frac{\partial u^{\alpha}}{\partial q^k} \frac{\partial u^{\beta}}{\partial p_k} \right) \left(\frac{\partial p_{\sigma}}{\partial u^{\alpha}} \frac{\partial q^{\alpha}}{\partial u^{\gamma}} - \frac{\partial p_{\sigma}}{\partial u^{\gamma}} \frac{\partial q^{\sigma}}{\partial u^{\alpha}} \right) =$$

$$= \sum_{\kappa\sigma} \left(\frac{\partial u^{\beta}}{\partial q^k} \frac{\partial q^{\sigma}}{\partial u^{\gamma}} \delta_{\sigma}^{\kappa} + \frac{\partial p_{\alpha}}{\partial u^{\gamma}} \frac{\partial u^{\beta}}{\partial q^k} \delta_{\kappa}^{\sigma} \right) = \delta_{\gamma}^{\beta}$$

cioé

(5.15) $$(u^{\alpha} u^{\beta})\{u^{\alpha} u^{\gamma}\} = \delta_{\gamma}^{\beta}$$

Se per es. si ha $u^{\beta} = Q^{\beta}$, $u^{\gamma} = Q^{\gamma}$, la somma precedente vale

$$\Sigma[(Q^{\alpha}, Q^{\beta})\{Q^{\alpha}, Q^{\gamma}\} + (P_{\alpha}, Q^{\beta})\{P_{\alpha}, Q^{\gamma}\}] = \delta_{\gamma}^{\beta}$$

Analogamente per $u^{\beta} = Q^{\beta}$, $u^{\gamma} = P_{\gamma}$ e per $u^{\beta} = P_{\beta}$, $u^{\gamma} = Q^{\gamma}$ si ha rispett.

$$\Sigma\left[(Q^{\alpha},Q^{\beta})\{Q^{\alpha},P_{\gamma}\}+(P_{\alpha},Q^{\beta})\{P_{\alpha},P_{\gamma}\}\right]=0$$

e

$$\Sigma\left[(Q^{\alpha},P_{\beta})\{Q^{\alpha},Q^{\gamma}\}+(P_{\alpha},P_{\beta})\{P_{\alpha},Q^{\gamma}\}\right]=\delta^{\gamma}_{\beta}\ .$$

Utilizzando le (12),(13) e (14), le ultime tre relazioni diventano

$$(5.16)\qquad (Q^{\alpha},Q^{\beta})=0\ ;\ (P_{\alpha},P_{\beta})=0\ ;\quad (P_{\alpha},Q^{\beta})=\delta^{\beta}_{\alpha}$$

Queste relazioni, assieme alle (12),(13 e (14) sono fondamentali: esse non sono però caratteristiche delle trasformazioni di contatto omogenee (vedere il n. 7).

La PP gode di una proprietà notevole e di grande utilità. Date tre funzioni f g h delle q, p sussiste l'identità, detta identità di Jacobi:

$$(f(g\ h))+(h(f\ g))+(g(h\ f)=0$$

che si può dimostrare con un calcolo diretto.

Infine è importante la seguente proprietà delle PP: la PP di una generica coppia di funzioni è invariante sotto trasformazioni di contatto omogenee(anche per questa proprietà v. n° 7): infatti se u(qp), v(qp) sono due funzioni delle q,p, si indichino con $\bar{u}(QP)$ $\bar{v}(Q\ P)$ le loro trasformate sotto la trasformazione di contatto $qp\to QP$ e cioè le funzioni

$$u[q(QP),p(QP)]\equiv\bar{u}(QP);\ v[q(QP),p(QP)]\equiv\bar{v}(QP)$$

Allora è

$$(\bar{u}\ \bar{v})_{QP}=\frac{\partial\bar{u}}{\partial Q^i}\frac{\partial\bar{v}}{\partial P_i}-\frac{\partial\bar{u}}{\partial P_i}\frac{\partial\bar{v}}{\partial Q^i}=\left(\frac{\partial u}{\partial q^k}\frac{\partial q^k}{\partial Q^i}+\frac{\partial u}{\partial p_k}\frac{\partial p_k}{\partial Q^i}\right)\cdot$$

$$\cdot\left(\frac{\partial v}{\partial q^k}\frac{\partial q^k}{\partial P_i}+\frac{\partial v}{\partial p_k}\frac{\partial p_k}{\partial P_i}\right)+\left(\frac{\partial u}{\partial q^k}\frac{\partial q^k}{\partial P_i}+\frac{\partial u}{\partial p_k}\frac{\partial p_k}{\partial P_i}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial q^k}\frac{\partial q^k}{\partial Q^i}+\frac{\partial v}{\partial p_k}\frac{\partial p_k}{\partial Q^i}\right)=(uv)_{qp}$$

che prova l'affermazione fatta.

Come ultima conseguenza della invarianza della PP sotto TC conviene menzionare alcune semplici relazioni che sono utili in dinamica. Le uguaglianze

$$(Q^i,q^k)_{qp} = (Q^i q^k)_{QP}$$

in termini espliciti si scrivono

$$\frac{\partial Q^i}{\partial p_s}\frac{\partial q^k}{\partial q^s} = -\frac{\partial Q^i}{\partial Q^s}\frac{\partial q^k}{\partial P_s}$$

e infine

$$\frac{\partial Q^i}{\partial p_k} = -\frac{\partial q^k}{\partial P_i} \quad . \tag{5.17}$$

In modo analogo si riconosce che sussistono le relazioni

$$\frac{\partial P_i}{\partial p_k} = \frac{\partial q^k}{\partial Q^i}\ ;\quad \frac{\partial P_i}{\partial q^k} = -\frac{\partial p_k}{\partial Q^i}\ ;\quad \frac{\partial Q^i}{\partial q^k} = \frac{\partial p_k}{\partial P_i} \tag{5.17'}$$

6. Trasformazioni di contatto non omogenee.

Come si è visto nel n° 2, se nella relazione

$$P_i dq^i = p_i dq^i \tag{2.6}$$

si pone $p_{n+1} = -1$

si ottiene una trasformazione non omogenea

$$\begin{cases} Q^i = \phi^i(q^1\dots q^{n+1};\ p_1\dots p_n) \\ P_i = \Psi_i(q^1\dots q^{n+1};\ p_1\dots p_n) \end{cases} \tag{6.1}$$

caratterizzata dalla relazione pfaffiana.

$$(6.2) \qquad P_i dQ^i = p_\alpha dq^\alpha - dq^{n+1} \qquad \begin{matrix}(i=1\ldots n+1)\\ (\alpha= 1\ldots n)\end{matrix}$$

Dalle (1) si ha:

$$\psi_i \left(\frac{\partial \phi^i}{\partial q^1} dq^1 + \frac{\partial \phi^i}{\partial q^\alpha} dq^\alpha + \frac{\partial \phi^i}{\partial p_\alpha} dp_\alpha \right) = - dq^1 + p_\alpha dq^\alpha$$

da cui

$$(6.3) \qquad \psi_i \frac{\partial \phi^i}{\partial q^{n+1}} = - 1; \ \psi_i \frac{\partial \phi^i}{\partial q^\alpha} = p_\alpha \ ; \ \psi_i \frac{\partial \phi^i}{\partial p_\alpha} = 0$$

Queste equazioni si possono ottenere dalle (3.4) ponendo $p_{n+1} = -1$: ciò prova esplicitamente che una trasformazione di contatto non omogenea si può ottenere da una trasformazione di contatto omogenea ponendo $p_{n+1} = -1$. Geometricamente la variabile q^{n+1} è trattata diversamente dalle altre, come nel caso in cui si scrive, ad es. l'equazione di una superficie nella forma $z = f(xy)$ anziché nella forma $f(xyz) = 0$.

Viceversa, se nelle (3) si pone

$$(6.4) \qquad p_\alpha = - p'_\alpha / p'_{n+1}$$

si ha indicando con $\phi'^i(qp')$ la funzione $\phi^i(qp)$

$$(6.5) \qquad \frac{\partial \phi'^i}{\partial p'_\alpha} = \frac{\partial \phi^i}{\partial p_\alpha} \frac{\partial p_\alpha}{\partial p'_\alpha} \text{ (non sommare su } \alpha) = - \frac{1}{p_{n+1}} \frac{\partial \phi^i}{\partial p_\alpha}$$

e, usando quest'ultima:

$$(6.5) \qquad \frac{\partial \phi'^i}{\partial p'_{n+1}} = \frac{\partial \phi'}{\partial p_\alpha} \frac{\partial p_\alpha}{\partial p'_{n+1}} = \frac{\partial \phi'}{\partial p_\alpha} \left(\frac{p'_\alpha}{p'^2_{n+1}} \right) = - \frac{p_\alpha}{p'_{n+1}} \frac{\partial \phi'}{\partial p_\alpha} \left(= p_\alpha \frac{\partial \phi'^i}{\partial p'_\alpha} \right) =$$

Moltiplicando la prima delle (3) per $-p'_{n+1}$ e osservando che è

$\frac{\partial\phi^i}{\partial q^k} = \frac{\partial\phi'^i}{\partial q^k}$, si ha

$$(6.6) \qquad -p'_{n+1}\Psi_i \frac{\partial\phi'^i}{\partial q^{n+1}} = p'_{n+1} \ .$$

Moltiplicanco poi per $-p'_{n+1}$ le seconde delle (3) si ha, usando le (4)

$$(6.6') \qquad -p'_{n+1}\Psi_i \frac{\partial\phi'^i}{\partial q^\alpha} = p'_\alpha \ .$$

Moltiplicanco infine per $-p'_{n+1}$ le ultime delle (3), oppure usando le le ultime delle (5) si ha

$$(6.6'') \qquad -p'_{n+1}\Psi_i \frac{\partial\phi'^i}{\partial q^\alpha} = 0 \ .$$

Infine dalle seconde delle (5) si ha

$$p'_{n+1} \frac{\partial\phi'^i}{\partial p'_{n+1}} = - p_\alpha \frac{\partial\phi'^i}{\partial p_\alpha}$$

e moltiplicando per Ψ_i e tenendo conto delle ultime delle (3)

$$(6.6''') \qquad 0 = p_\alpha\Psi_i \frac{\partial\phi^i}{\partial p_\alpha} = p'_{n+1}\Psi_i \frac{\partial\phi'^i}{\partial p'_{n+1}} \ .$$

Introducendo le funzioni

$$\Psi'_i(qp') = -p'_{n+1}\Psi_i(q^1 \ldots q^{n+1}; -\frac{p'_1}{p_{n+1}} \ldots -\frac{p'_n}{p'_{n+1}})$$

le (6),(6'),(6"),(6''') si possono scrivere

(6.7) $$\psi'_i \frac{\partial\phi^i}{\partial q^k} = p'_k \ ; \quad \psi'_i \frac{\partial\phi'^i}{\partial p'_k} = 0 \quad .$$

Le (7) mostrano che la trasformazione di contatto $q^i, p'_i \to \phi'^i, \psi'_i$ è omogenea.

E' ovvio che se si passa dalla trasformazione omogenea ad una non omogenea, col procedimento ora descritto si ottiene la trasformazione omogenea di partenza.

Data lo pfaffiano

$$\psi_i dQ^i = -dq^{n+1} + p_\alpha dq^\alpha$$

moltiplicandolo per $-p'_{n+1}$, si ha

$$-p'_{n+1}\psi_i dq^i = p'_{n+1} dq^{n+1} - p'_{n+1} p_\alpha dq^\alpha$$

e questo pfaffiano è relativo a una trasformazione di contatto omogenea

$$Q^i = \phi'^i(qp) \ ; \qquad P_i = \psi'_i\,(qp) = -\, p'_{n+1}\psi_i$$

Naturalmente è

$$\left|\frac{\partial\phi'^i}{\partial q^k}\right| = \left|\frac{\partial\phi^i}{\partial q^k}\right| \neq 0$$

e deve essere pure

$$\left|\frac{\partial\phi'^i}{\partial p_k}\right| \neq 0 \quad .$$

La dimostrazione di questa ultima proprietà viene lasciata come esercizio.

Conviene ora scrivere le (5.12),(5.13),(5.14) esplicitamente per il caso non omogeneo. A tale scopo basta utilizzare sistematicamente le (5) e le analoghe:

$$(6.8)\begin{cases} \dfrac{\partial\Psi'_i}{\partial p'_{n+1}} = -\dfrac{\partial}{\partial p'_{n+1}}(p'_{n+1}\Psi_i) = -\Psi_{n+1} - p'_{n+1}\left(-\dfrac{\partial\Psi_i}{\partial p_\alpha}\dfrac{\partial p_\alpha}{\partial p'_{n+1}}\right) = \\ \qquad\qquad = -\Psi_{n+1} + p_\alpha \dfrac{\partial\Psi_i}{\partial p_\alpha} \\ \dfrac{\partial\Psi'_i}{\partial p'_\alpha} = -\dfrac{1}{p'_{n+1}}\dfrac{\partial\Psi_i}{\partial p_\alpha} \end{cases}$$

Servendosi di queste, si trova:

$$0 = (\phi'^i\phi'^k)_{qp'} = \frac{\partial\phi'^i}{\partial p'_\ell}\frac{\partial\phi'^k}{\partial q^\ell} - \frac{\partial\phi'^i}{\partial q^\ell}\frac{\partial\phi'^i}{\partial p'_\ell} =$$

$$= \frac{\partial\phi'^i}{\partial p'_\alpha}\frac{\partial\phi'^k}{\partial q^\alpha} + \frac{\partial\phi'^i}{\partial p'_{n+1}}\frac{\partial\phi'^k}{\partial q^{n+1}} - \frac{\partial\phi'^i}{\partial q^\alpha}\frac{\partial\phi'^k}{\partial p'_\alpha} - \frac{\partial\phi'^i}{\partial q^{n+1}}\frac{\partial\phi'^k}{\partial p'_{n+1}} .$$

Utilizzando le (5), tenendo presente che $p'_{n+1} \neq 0$ e definendo una nuova parentesi, si ha:

$$[\phi'^i\phi'^k] = \frac{\partial\phi^i}{\partial p_\alpha}\left(\frac{\partial\phi^k}{\partial p_\alpha} + p_\alpha\frac{\partial\phi^k}{\partial q^{n+1}}\right) - \frac{\partial\phi^k}{\partial p_\alpha}\left(\frac{\partial\phi^i}{\partial q^\alpha} + p_\alpha\frac{\partial\phi^i}{\partial q^{n+1}}\right) = 0$$

o anche

$$(6.9)\quad [\phi^i\phi^k] = (\phi^i\phi^k) + p_\alpha\left(\frac{\partial\phi^i}{\partial p_\alpha}\frac{\partial\phi^k}{\partial q^{n+1}} - \frac{\partial\phi^k}{\partial p_\alpha}\frac{\partial\phi^i}{\partial q^{n+1}}\right) = 0 \quad .$$

Analogamente

$$(\Psi'_i\,\Psi'_k)_{qp'} = \left(-\Psi_i + \frac{\partial\Psi_i}{\partial p_\alpha}p_\alpha\right)\frac{\partial\Psi_k}{\partial q^{n+1}} - \frac{\partial\Psi_k}{\partial p_\alpha}\left(\frac{1}{p'_{n+1}}\frac{\partial\Psi_i}{\partial p_\alpha}\right) -$$

$$- \left(-\Psi_k + \frac{\partial\Psi_k}{\partial p_\alpha}p_\alpha\right)\frac{\partial\Psi_i}{\partial q^{n+1}} + \frac{\partial\Psi_{n+1}}{\partial q^\alpha}\frac{1}{p'_{n+1}}\frac{\partial\Psi_k}{\partial p_\alpha}$$

ossia applicando la definizione data dalla parentesi [ ] :

$$(6.10)\quad [\Psi_i\Psi_k] = \Psi_i\frac{\partial\Psi_k}{\partial q^{n+1}} - \Psi_k\frac{\partial\Psi_i}{\partial q^{n+1}}$$

e analogamente

$$(6.11) \qquad [\Psi_k \phi^i] = \delta^i_k + \Psi_k \frac{\partial \phi^i}{\partial q^{n+1}} \quad .$$

Come per il caso omogeneo, si riconosce che n+1 funzioni ϕ^i soddisfacenti ad opportune condizioni, individuano una trasformazione di contatto non omogenea.

Siano ϕ^i n+1 funzioni soddisfacenti le seguenti condizioni

a) $$\left| \frac{\partial \phi^i}{\partial q^k} \right| \neq 0$$

b) $$[\phi^i \phi^k] = 0 \qquad \text{(eqq. (9))} .$$

Si risolva il sistema di equazioni

$$(6.12) \qquad \begin{cases} \Psi_i \dfrac{\partial \phi^i}{\partial q^{n+1}} = -1 \\[2ex] \Psi_i \dfrac{\partial \phi^i}{\partial p^\alpha} = p_\alpha \end{cases}$$

Questo sistema lineare di n+1 equazioni nelle n+1 incognite Ψ_i per a) è risolubile con la regola di Cramer.

L'unica soluzione di (12) soddisfa inoltre alle ultime delle (3).

$$(6.13) \qquad \Psi_i \frac{\partial \phi^i}{\partial p_\alpha} = 0 \quad .$$

Infatti, poiché le ϕ^i soddisfano le (9), moltiplicando queste ultime per Ψ_i e sommando su i si ha:

$$\Psi_i \frac{\partial \phi^i}{\partial p_\alpha} \left(\frac{\partial \phi^k}{\partial q^\alpha} + p_\alpha \frac{\partial \phi^k}{\partial q^{n+1}} \right) - \frac{\partial \phi^k}{\partial p_\alpha} \left(\Psi_i \frac{\partial \phi^i}{\partial q^\alpha} + p_\alpha \Psi_i \frac{\partial \phi^i}{\partial q^{n+1}} \right) = 0 \ .$$

L'ultima parentesi è nulla per le (12). Resta quindi:

$$(6.14)\qquad \Psi_i \frac{\partial\phi^i}{\partial p_\alpha}\left(\frac{\partial\phi^k}{\partial q^\alpha} + p_\alpha \frac{\partial\phi^k}{\partial q^{n+1}}\right) = 0 \quad .$$

Questo è ur sistema di $n+1$ equazioni nelle n incognite: $\Psi_i \frac{\partial\phi^i}{\partial p_\alpha}$ e basta dimostrare che esiste un sistema di n equazioni estratte da (14) aventi la sola soluzione nulla per concludere che le (13), cioé le ultime delle (3), sono soddisfatte. (Ovviamente valori tutti nulli delle incognite sodcisfano anche l'ultima equazione). Ciò equivale a trovare, nella matrice a $n+1$ righe ed n colonne $\left|\frac{\partial\phi^i}{\partial q^\alpha} + p_\alpha \frac{\partial\phi^i}{\partial q^{n+1}}\right|$ un minore di ordine n non nullo.

Risolvendo le prime $n+1$ delle (3) si ha:

$$(6.15)\qquad \left|\frac{\partial\phi}{\partial q}\right| \Psi_k = (-1)^k \begin{vmatrix} -p_1 & \frac{\partial\phi^1}{\partial q^1} & \cdots & \frac{\partial\phi^{k-1}}{\partial q^1} & \frac{\partial\phi^{k+1}}{\partial q^1} & \cdots & \frac{\partial\phi^{n+1}}{\partial q^1} \\ -p_2 & \frac{\partial\phi^1}{\partial q^2} & \cdots & \frac{\partial\phi^{k-1}}{\partial q^2} & \frac{\partial\phi^{k+1}}{\partial q^2} & \cdots & \frac{\partial\phi^{n+1}}{\partial q^2} \\ -1 & \frac{\partial\phi^1}{\partial q^{n+1}} & \cdots & \frac{\partial\phi^{k-1}}{\partial q^{n+1}} & \frac{\partial\phi^{k+1}}{\partial q^{n+1}} & \cdots & \frac{\partial\phi^{n+1}}{\partial q^{n+1}} \end{vmatrix}$$

Ponendo $\phi^i_\ell \equiv \frac{\partial\phi^i}{\partial q^\ell}$ si ha, sviluppando il membro destro dell'ultima riga ((k) indica l'assenza della colonna delle $\phi^{\cdot}_k$)

$$\begin{vmatrix} \phi^1_1 \cdots \phi^{n+1}_1 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \phi^1_{n+1} \cdots \phi^{n+1}_{n+1} \end{vmatrix}^{(k)} - \phi^1_{n+1} \begin{vmatrix} -p_1 & \phi^2_1 \cdots \phi^{n+1}_1 \\ & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ -p_n & \phi^2_n \cdots \phi^{n+1}_n \end{vmatrix}^{(k)} + \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$
(6.16) \qquad + \phi^{2}_{1} \begin{vmatrix} -p_1 & \phi^{1}_{1} & \phi^{3}_{1} \cdots \phi^{n+1}_{1} \\ \\ -p_n & \phi^{1}_{n} & \phi^{3}_{n} \cdots \phi^{n+1}_{n} \end{vmatrix}^{(k)} + \; = \begin{vmatrix} \phi^{1}_{1} \cdots \phi^{n+1}_{1} \\ \\ \phi^{1}_{n} \cdots \phi^{n+1}_{n} \end{vmatrix}^{(k)} + \begin{vmatrix} p_1 \phi^{1}_{n+1} & \phi^{2}_{1} \cdots \phi^{n+1}_{1} \\ \\ p_n \phi^{1}_{n+1} & \phi^{2}_{n} \cdots \phi^{n+1}_{n} \end{vmatrix}^{(k)} +
$$

$$
+ \begin{vmatrix} \phi^{1}_{1} & p_1 & \phi^{2}_{1} & \phi^{3}_{1} & \cdots & \phi^{n+1}_{1} \\ \\ \phi^{1}_{n} & p_n & \phi^{2}_{1} & \phi^{3}_{n} & \cdots & \phi^{n+1}_{n} \end{vmatrix}^{(k)} + \cdots
$$

Si può notare che questa è una somma di matrici di ordine n aventi a due a due $n-1$ colonne uguali: le colonne diverse contengono(tranne che per la prima matrice) le $p_1 \ldots p_n$. Per es. le prime due matrici hanno solo la prima colonna diversa. Sommandole si ha:

$$
\begin{vmatrix} \phi^{1}_{1} + p_1 \phi^{1}_{n+1} & \phi^{2}_{1} & \cdots & \phi^{n+1}_{1} \\ \\ \phi^{1}_{n} + p_n \phi^{n}_{n+1} & \phi^{2}_{n} & \cdots & \phi^{n+1}_{n} \end{vmatrix}
$$

Questa matrice differisce ora dalla terza matrice che compare nella (16) per le sole prime due colonne. Si può però osservare che, se si scrive

$$
(6.17) \qquad \begin{vmatrix} \phi^{1}_{1} + p_1 \phi^{1}_{n+1} & \phi^{2}_{1} + p_1 \phi^{2}_{n+1} & \phi^{3}_{1} \cdots \phi^{n+1}_{1} \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ \phi^{1}_{n} + p_n \phi^{n}_{n+1} & \phi^{2}_{n} + p_n \phi^{2}_{n+1} & \phi^{3}_{n} \quad \phi^{n+1}_{n} \end{vmatrix}
$$

si ottiene effettivamente la somma delle prime tre matrici nell'ultimo membro della (16). Infatti scrivendo la (17) come somma di matrici, si ottengono, oltre alle prime tre matrici (16), anche la matrice

$$\phi_{r+1}\ \phi^2_{n+1} \begin{vmatrix} p & p_1 & \cdots\cdots \\ p_1 & p_n & \end{vmatrix}$$

che ha determinante nullo perché ha due colonne uguali.

E' chiaro allora che, se si procede in questo modo, la somma delle n+1 matrici (16) può essere scritta come un'unica matrice

$$(6.18) \qquad \left\| \frac{\partial \phi^\ell}{\partial q^\alpha} + p_\alpha \frac{\partial \phi^\ell}{\partial q^{n+1}} \right\|$$

Le matrici a destra nella (15) non sono quindi riducibili alle trasposte dei minori di ordine n delle matrici del sistema (14).

Fra le soluzioni ψ_i del sistema (12) date dalle (15), una almeno, sia essa ψ_k, è diversa da zero e quindi la corrispondente matrice a destra nella (15) è diversa da zero. Di conseguenza una almeno delle matrici (18) è diversa da zero e cioè uno almeno dei sistemi di ordine n estratti da (14) ha determinante non nullo. Perciò sussistono le (13).

Si conclude che se le ϕ^i soddisfano le condizioni a) e b) esse individuano una trasformazione di contatto non omogenea.

Appendice al n. 6.

Nel caso in cui la (6.2) sia data esplicitamente nella forma (2.5)

$$(6.19) \qquad dZ - P_i dQ^i = a(dz - p_i dq^i) \qquad (i = 1 \ldots n)$$

ci si riconduce alla (6.2) scrivendo:

$$-\frac{1}{a}\, dZ + \frac{P_i}{a}\, dQ^i = -\, dz + p_i\, dq^i$$

dove ora z ha il ruolo della q^{n+1} nella (5.2).

Posto

$$\Psi_{n+1} = -\frac{1}{a} \; ; \quad \Psi_i - \frac{P_i}{a}$$

si ha la forma (2).

Le (9),(10) e (11) si traducono facilmente in termini delle ZQP. Per Q,Z si ha direttament :

$$[Z\, Q^{\alpha}] = [Q^{\alpha}\, Q^{\beta}] = 0$$

poiché le funzioni ϕ ,ϕ^i che compaiono nelle (2.1) sono della stesso tipo del caso precedente.

Analogamente usando le (10) si ha:

$$[P_\alpha P_\beta] = [\frac{\Psi_\alpha}{\Psi_{n+1}} , \frac{\Psi_\beta}{\Psi_{n+1}}] = \frac{1}{\Psi^2_{n+1}}[\Psi_\alpha \Psi_\beta] + \frac{\Psi_\beta}{\Psi_{n+1}}[\Psi_\alpha \frac{1}{\Psi_{n+1}}] + \frac{\Psi_\alpha}{\Psi_{n+1}} [\frac{\Psi_\alpha}{\Psi_{n+1}} \Psi_\beta] =$$

$$=(\text{per le }(10))= \frac{1}{\Psi^2_{n+1}}(\Psi_\alpha \frac{\partial\Psi_\beta}{\partial z} - \Psi_\beta \frac{\partial\Psi_\alpha}{\partial z}) - \frac{\Psi_\beta}{\Psi^3_{n+1}} (\Psi_\alpha \frac{\partial\Psi_{n+1}}{\partial z} - \Psi_{n+1} \frac{\Psi_\alpha}{\Psi z}) -$$

$$- \frac{\Psi_\alpha}{\Psi^3_{n+1}}(\Psi_{n+1} \frac{\partial\Psi_\beta}{\partial z} - \Psi_\beta \frac{\partial\Psi_{n+1}}{\partial z}) = 0$$

dove z ha il ruolo di q^{n+1} .

Inoltre:

$$[P_\alpha Q^\beta] = - [\frac{\Psi_\alpha}{\Psi_{n+1}} Q^\beta] = - \frac{1}{\Psi_{n+1}} [\Psi_\alpha ,Q^\beta] + \frac{\Psi_\alpha}{\Psi^2_{n+1}} [\Psi_{n+1} Q^\beta] = - \frac{1}{\Psi_{n+1}} (\delta^\alpha_\beta + \Psi_\alpha \frac{\partial Q^\beta}{\partial z})+$$

$$+ \frac{\Psi_\alpha}{\Psi^2_{n+1}} (\delta^\beta_{n+1} + \Psi_{n+1} \frac{\partial Q^\beta}{\partial z}) =$$

$$= \frac{1}{\Psi_{n+1}} \delta^\beta_\alpha + \frac{\Psi_\alpha}{\Psi_{n+1}} \delta^\beta_{n+1}$$

se $\alpha \neq \beta$ e $\beta \neq n+1$ risulta $[P_\alpha Q^\beta] = 0$

Se $\alpha=\beta \neq n+1$ si ha:

$$[P_\alpha Q^\alpha] = - \frac{1}{\Psi_o} = a$$

Se, infine, $\alpha \neq \beta = n+1$ si ha

$$[P_\alpha Z] = \frac{\frac{\alpha}{2}}{n+1} = aP_\alpha$$

Raccogliendc

$$(6.20) \quad \begin{cases} [ZQ^\alpha] = [Q^\alpha Q^\beta] = [P_\alpha P_\beta] = 0 \ , \ [P_\alpha Q^\beta] = a\delta_\alpha^\beta \\ [P_\alpha Z] = aP_\alpha \end{cases}$$

7. Trasformazioni di contatto non omogenee ristrette.(Trasformazioni canoniche).

Se la funzione ϕ^{n+1} è della forma $\phi^{n+1} \to q^{n+1} + \phi^{n+1} (q^1 \dots q^n p_1 \dots p_n)$ e le ϕ^α non contengono q^{n+1}, la trasformazione di contatto è detta "ristretta".

Sono di questo tipo le trasformazioni canoniche della meccanica analitica. In seguito si userà sistematicamente l'espressione <u>trasformazioni canoniche</u> (T C) .

La relazione (6.3)

$$(6.3) \qquad \Psi_i \frac{\partial \phi^i}{\partial q^{n+1}} = - 1; \ \Psi_i \frac{\partial \phi^i}{\partial q^\alpha} = p_\alpha ; \ \Psi_i \frac{\partial \phi^i}{\partial p_\alpha} = 0$$

si scrivono per $\phi^{n+1} \to q^{n+1} + \phi^{n+1} (q^1 \dots q^n \dots p_1 \dots p_n)$:

$$\Psi_{n+1} \frac{\partial \phi^{n+1}}{\partial q^1} = - 1 \qquad \text{cioé} \qquad \Psi_{n+1} = - 1$$

$$\Psi_\beta \frac{\partial \phi^\beta}{\partial q^\alpha} \quad \Psi_{n+1} \frac{\partial \phi^{n+1}}{\partial q^\alpha} = p_\alpha \quad \text{cioé} \quad \Psi_\beta \frac{\partial \phi^\beta}{\partial q^\alpha} = p_\alpha - \Psi_{n+1} \frac{\partial \phi^{n+1}}{\partial q^\alpha}$$

$$\Psi_\beta \frac{\partial \phi^\beta}{\partial p_\alpha} + \Psi_{n+1} \frac{\partial \phi^{n+1}}{\partial p_\alpha} = 0 \quad \text{cioé} \quad \Psi_\beta \frac{\partial \phi^\beta}{\partial p_\alpha} = - \Psi_{n+1} \frac{\partial \phi^{n+1}}{\partial p_\alpha}$$

o infine

$$(7.1) \qquad \Psi_{n+1} = -1 \; ; \; \Psi_\beta \frac{\partial\phi^\beta}{\partial q^\alpha} = p_\alpha + \frac{\partial\phi^{n+1}}{\partial q^\alpha} \; ; \; \Psi_\beta \frac{\partial\phi^\beta}{\partial p_\alpha} = \frac{\partial\phi^1}{\partial p_\alpha}$$

Da questa segue che le Ψ sono indipendenti da q^{n+1}.
Le (5.9) si scrivono

$$[\phi^k\phi^\ell] = (\phi^k\phi^\ell)+p_\alpha\left(\frac{\partial\phi^k}{\partial p_\alpha}\frac{\partial\phi^\ell}{\partial q^{n+1}} - \frac{\partial\phi^\ell}{\partial p_\alpha}\frac{\partial\phi^k}{\partial q^{n+1}} \right) = 0 \quad .$$

Per $k,\ell \neq n+1$ è $\frac{\partial\phi^{k,\ell}}{\partial q^{n+1}} = 0$ e quindi le precedenti si riducono alle relazioni:

$$(\phi^k\phi^\ell) = 0$$

Si ha inoltre

$$[\phi^{n+1},\phi^\beta] = (\phi^{n+1},\phi^\beta) - p_\alpha\left(\frac{\partial\phi^{n+1}}{\partial p_\alpha}\frac{\partial\phi^\beta}{\partial q^{n+1}} - \frac{\partial\phi^{n+1}}{\partial q^1}\frac{\partial\phi^\beta}{\partial p_\alpha} \right) = 0$$

ed essendo $\frac{\partial\phi^\beta}{\partial q^{n+1}} = 0$; $\frac{\partial\phi^{n+1}}{\partial q^1} = 1$, resta $(\phi^{n+1}\phi^\beta) = p_\alpha \frac{\partial\phi^\beta}{\partial p_\alpha}$

Dalle (6.10) segue

$$[\Psi_i\Psi_k] = \Psi_i \frac{\partial\Psi_k}{\partial q^{n+1}} - \Psi_k \frac{\partial\Psi_i}{\partial q^{n+1}} = 0$$

essendo le Ψ indipendenti da q^{n+1}. Poiché inoltre

$$[\Psi_i\Psi_k] = (\Psi_i\Psi_k)+p_\alpha\left(\frac{\partial\Psi_i}{\partial p_\alpha}\frac{\partial\Psi_k}{\partial q^{n+1}} - \frac{\partial\Psi_i}{\partial q^{n+1}}\frac{\partial\Psi_k}{\partial p_\alpha} \right)$$

si ha infine

$$(\Psi_i\Psi_k) = 0$$

Dalle (6.11) si ha poi,come sopra:

$$[\Psi_k \phi^i] = (\Psi_k \phi^i) = \delta_k^i + \Psi_k \frac{\partial \phi^i}{\partial q^{n+1}} = \delta_k^i \qquad (i \neq n+1)$$

$$(\Psi_k \phi^{n+1}) = \delta_k^{n+1} \qquad (i = n+1)$$

e quindi

$$[\Psi_\alpha \phi^{n+1}] = (\Psi_\alpha \phi^{n+1}) + p_\beta \left(\frac{\partial \Psi_\alpha}{\partial p_\beta} \frac{\partial \phi^{n+1}}{\partial q^{n+1}} - \frac{\partial \Psi_\alpha}{\partial q^{n+1}} \frac{\partial \phi^{n+1}}{\partial p_\alpha} \right) =$$

$$= \delta_\alpha^{n+1} + \Psi_\alpha \frac{\partial \phi^{n+1}}{\partial q^{n+1}} = \Psi_\alpha$$

e infine

$$(\Psi_\alpha, \phi^{n+1}) = \Psi_\alpha - p_\beta \frac{\partial \Psi_\alpha}{\partial p_\beta} .$$

Raccogliendo

$$(7.2) \qquad \begin{cases} (\phi^\alpha \phi^\beta) = 0 = (\Psi_\alpha, \Psi_\beta) \; ; \; (\Psi_\alpha, \phi^\beta) = \delta_\alpha^\beta \\ (\phi^{n+1}, \phi^\beta) = p_\alpha \dfrac{\partial \phi^\beta}{\partial p_\alpha} \\ (\Psi_\alpha, \phi^{n+1}) = \Psi_\alpha - p_\beta \dfrac{\partial \Psi_\alpha}{\partial p_\alpha} \end{cases}$$

Sicché per le TC le (6.9),(6.10),(6.11) si riducono alle (7.2). La prima riga di queste relazioni coincide con le (5.16) e mostra che le più generali trasformazioni di contatto, per le quali sussistono le relazioni di commutazione, sono le TC. Si riconosce facilmente che anche l'invarianza delle PP di due funzioni sotto TC sussiste come per le trasformazioni omogenee.

Ricalcando il procedimento del n° 3 si riconosce che:

Se le ϕ^α $(\alpha = 1\dots n)$ sono n funzioni, fra loro indipendenti, delle $q^1\dots q^n, p_1\dots p_n$, soddisfacenti le relazioni:

$$(\phi^\alpha, \phi^\beta) = 0$$

e ϕ^{n+1} una qualunque funzione di $q^1\dots q^n, p_1\dots p_n$ soddisfacente le relazioni

$$(\phi^{n+1}, \phi^\beta) = p_\alpha \frac{\partial\phi^\beta}{\partial p_\alpha}$$

le equazioni

$$(7.3) \qquad Q^{n+1} = q^{n+1} + \phi^{n+1}, \quad Q^\alpha = \phi^\alpha; \quad P_\alpha = \Psi_\alpha$$

dove le Ψ sono univocamente determinate dalle (6.3), determinano una TC per la quale

$$P_{n+1}dQ^{n+1} + P_\alpha dQ^\alpha = - dq^{n+1} + p_\alpha dq^\alpha$$

cioé, essendo $P_{n+1} = -1$:

$$dQ^{n+1} - P_\alpha dQ^\alpha = dq^{n+1} - p_\alpha dq^\alpha$$

e infine

$$(7.4) \qquad P_\alpha dQ^\alpha = p_\alpha dq^\alpha + d\phi^{n+1} .$$

Questa relazione caratterizza le TC.

Viceversa, essendo ϕ^{n+1} funzione delle variabili $q^\alpha p_\alpha$, si ha dalla (7.4):

$$\frac{\partial\phi^{n+1}}{\partial q^\alpha} = - p_\alpha + P_\gamma \frac{\partial\phi^\gamma}{\partial q^\alpha}$$

$$\frac{\partial\phi^{n+1}}{\partial p_\alpha} = P_\gamma \frac{\partial\phi^\gamma}{\partial p_\alpha}$$

e da queste si ricavano le ultime due righe delle (2).

E' facile riconoscere, infine, che se sono date 2n funzioni $\phi^{\alpha}, \Psi_{\alpha}$ soddisfacenti le relazioni che compaiono nella prima riga delle (2) è possibile determinare una funzione ϕ^{n+1} che soddisfi le restanti relazioni (2).

Dalle (6.3) si ha infatti:

$$(7.5) \qquad \frac{\partial \phi^{n+1}}{\partial q^{\alpha}} = \Psi_{\gamma} \frac{\partial \phi^{\gamma}}{\partial q^{\alpha}} - p_{\alpha} ; \quad \frac{\partial \phi^{n+1}}{\partial p_{\alpha}} = \Psi_{\gamma} \frac{\partial \phi^{\gamma}}{\partial p_{\alpha}} .$$

Se le ϕ^{α}, Ψ_{α} sono date, si può dimostrare che le condizioni espresse dalla prima riga della (2) assicurano che i secondi membri delle (5) siano le derivate di un'unica funzione, ϕ^{n+1} e cioè che le (5) sussistono. Si ha infatti con calcolo diretto:

$$\frac{\partial}{\partial q^{\beta}} \left(\Psi_{\gamma} \frac{\partial \phi^{\gamma}}{\partial q^{\alpha}} - p_{\alpha}\right) = \frac{\partial \Psi_{\gamma}}{\partial q^{\beta}} \frac{\partial \phi^{\gamma}}{\partial q^{\alpha}} + \Psi_{\gamma} \frac{\partial^{2} \phi^{\gamma}}{\partial q^{\alpha} \partial q^{\beta}} ,$$

$$\frac{\partial}{\partial q^{\alpha}} \left(\Psi_{\gamma} \frac{\partial \phi^{\gamma}}{\partial q^{\beta}} - p_{\beta}\right) = \frac{\partial \Psi_{\gamma}}{\partial q^{\alpha}} \frac{\partial \phi^{\gamma}}{\partial q^{\beta}} + \Psi_{\gamma} \frac{\partial^{2} \phi^{\gamma}}{\partial q^{\alpha} q^{\beta}}$$

e sottraendo

$$\frac{\partial}{\partial q^{\beta}} (\ ) - \frac{\partial}{\partial q^{\alpha}} (\ ) = \{q^{\beta} q^{\alpha}\} = 0$$

essendo $\{q^{\beta}, q^{\alpha}\}$ la PL delle q rispetto alle $\phi \Psi$.

Analogamente si ha

$$\frac{\partial}{\partial p_{\beta}} \left(\Psi_{\gamma} \frac{\partial \phi^{\gamma}}{\partial p_{\alpha}}\right) - \frac{\partial}{\partial p_{\alpha}} \left(\Psi_{\gamma} \frac{\partial \phi^{\gamma}}{\partial p_{\beta}}\right) = \{p_{\alpha} p_{\beta}\} = 0$$

e infine

$$\frac{\partial}{\partial p_{\beta}} \left(\Psi_{\gamma} \frac{\partial \phi^{\gamma}}{\partial q^{\alpha}} - p_{\alpha}\right) = \frac{\partial \Psi_{\gamma}}{\partial p_{\beta}} \frac{\partial \phi_{\gamma}}{\partial q^{\alpha}} + \Psi_{\gamma} \frac{\partial^{2} \phi^{\gamma}}{\partial p_{\beta} \partial q^{\alpha}} - \delta_{\alpha\beta}$$

$$\frac{\partial}{\partial q^\alpha}\left(\Psi_\gamma \frac{\partial \phi^\gamma}{\partial p_\beta}\right) = \frac{\partial \Psi_\gamma}{\partial q^\alpha} \frac{\partial \phi^\gamma}{\partial p_\beta} + \Psi_\gamma \frac{\partial \phi^\gamma}{\partial p_\beta \partial q^\alpha}$$

e sottraendo

$$\{p_\beta \; q^\alpha\} - \delta_{\alpha\beta} = \delta^\alpha_\beta - \delta^\beta_\alpha = 0 \quad .$$

(Le PL sono nulle in virtù dell'ipotesi che si annullino le P.P.). Esiste quindi una funzione ϕ^{n+1} soddisfacente le (5): in definitiva tutte le (2) sono soddisfatte e pertanto le 2n funzioni $\phi^\alpha \; \Psi_\alpha$ soddisfacenti le relazioni canoniche delle PP, individuano una TC. Questo risultato sarà usato a proposito dei gruppi di funzioni e, in particolare, nel caso degli integrali primi del moto.

Se le ϕ^β sono omogenee di grado zero, nelle p_α si deve ottenere una trasformazione omogenea. Infatti si consideri il sistema :

$$(\phi^{n+1}, \phi^\beta) = 0 \qquad\qquad (\beta = 1 \ldots n) \quad .$$

Date le ϕ^β questo è un sistema differenziale lineare e la identità di Jacobi mostra che esso è completo: esso possiede quindi $2n-n = n$ integrali indipendenti. Ma le ϕ^β sono già n integrali in virtù delle relazioni di commutazione. Quindi ϕ^{n+1} è funzione delle ϕ^β. Le (4) danno in questo caso

$$\Psi_\beta \frac{\partial \phi^\beta}{\partial q^\alpha} - \frac{\partial \phi^{n+1}}{\partial \phi^\beta} \frac{\partial \phi^\beta}{\partial q^\alpha} = p_\alpha \; ; \; \Psi_\beta \frac{\partial \phi^\beta}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial \phi^{n+1}}{\partial \phi^\beta} \frac{\partial \phi^\beta}{\partial p_\alpha} = 0$$

ossia

$$\left(\Psi_\beta - \frac{\partial \phi^{n+1}}{\partial \phi^\beta}\right) \frac{\partial \phi^\beta}{\partial q^\alpha} = p_\alpha \; ; \; \left(\Psi_\beta - \frac{\partial \phi^{n+1}}{\partial \phi^\beta}\right) \frac{\partial \phi^\beta}{\partial p_\alpha} = 0$$

Queste relazioni sono le (3.4) quando si ponga

$$\Psi_\beta \rightarrow \Psi_\beta - \frac{\partial \phi^{n+1}}{\partial \phi^\beta}$$

e quindi la trasformazione è omogenea.

Si torni ora alle (3). Se $\left| \frac{\partial \phi^\alpha}{\partial p_\alpha} \right| \neq 0$ eliminando le p_β dalle relazioni $Q^\alpha = \phi^\alpha$ e sostituendole nella $Q^{n+1} = q^{n+1} + \phi^{n+1}$ si ha

$$(7.6) \qquad \phi^{n+1} = Q^{n+1} - q^{n+1} = F(q^1 \ldots q^n, Q^1 \ldots Q^n) \; ;$$

questa funzione in dinamica è detta generatrice della TC.

Più in generale se il rango della matrice $\left\| \frac{\partial \phi^i}{\partial p_\beta} \right\|$ è $n-r$ esistono, oltre alla (6) altre $r-1$ funzioni $F_\alpha(q^1 \ldots q^n ; Q^1 \ldots Q^n)$ $(\alpha = 2 \ldots r)$ tali che le equazioni

$$(7.7) \qquad F_k(qQ) = 0 \qquad (k = 1 \ldots r)$$

sono conseguenza dell'annullarsi di $\left| \frac{\partial \phi^\beta}{\partial p^\alpha} \right|$.

Come nel caso omogeneo si ricavano le relazioni:

$$P_\alpha = \frac{\partial F}{\partial Q^\alpha} + \rho^\sigma \frac{\partial F_\sigma}{\partial Q^\alpha} \; ; \; p_\alpha = - \frac{\partial F}{\partial q^\alpha} - \rho^\sigma \frac{\partial F_\sigma}{\partial q^\alpha} ,$$

che si riducono alle (3.7).

$$(7.8) \qquad P_\alpha = \frac{\partial F}{\partial Q^\alpha} \; ; \; p_\alpha = - \frac{\partial F}{\partial q^\alpha}$$

se la matrice ha rango massimo.

Come nel caso omogeneo e nel caso non omogeneo generale, le trasformazioni non omogenee ristrette formano gruppo.

Siano allora $qp \to \rho\eta$ e $QP \to qp$ due TC. Dalle relazioni

$$\eta_i d\, \xi^i = p_i d\, q^i + d\, w_1(q\xi)$$
$$P_i dQ^i = p_i d\, q^i + d\, w_2(qQ)$$

sottraendo a m a m si ha

$$P_i d\, Q^i = \eta_i d\, \xi^i + d(w_2 - w_1).$$

Detta quindi w la generatrice della trasformazione $\xi\eta \to PQ$, si ha

(7.9) $\qquad w = w_2 - w_1$

dove naturalmente la funziore w va espressa nelle variabili ξ, Q.

A tale scopo, poiché w_2 dipende dalle q e dalle Q, mentre w_1 dipende dalle ξ e dalle q, basta esprimere le q in funzione delle ξ e delle Q.

Dalla TC di generatrice w_1

$$q^i = a^i(\rho n) \qquad p_i = b_i(\rho n)$$

e dalla TC di generatrice w_2

$$Q^i = c^i(qp) , \qquad P_i = d_i(qp)$$

si ottiene per semplice sostituzione la TC individuata da $w_2 - w$

$$Q^i = \bar{c}^i(\rho n) \qquad P_i = \bar{d}^i(\rho n) \quad .$$

Invertendo le prime n di queste si ottengono le (ρQ^i) che sostitui te nelle $a^i(\rho n)$ forniscono le q^i in funzione delle $\xi Q t$.

Come caso particolare della discussione ora fatta, e come del resto è ovvio dalla (4), se una TC ha generatrice w, la TC inversa ha genera trice $-w$.

In dinamica hanno un ruolo fondamentale le famiglie ad un parametro di TC. In generale una famiglia ad un parametro di trasformazioni di contatto

(7.10) $\qquad Q^i = \phi^i(q\ p\ t) \quad ; P_i = \psi_i(q\ p\ t)$

è una famiglia di trasformazioni tali che per ogni valore di t (in un interval lo opportuno) la trasformazione precedente è di contatto. In partico- lare se le (10) sono trasformazioni canoniche, per ogni valore di t esiste una funzione generatrice della corrispondente trasformazione. Esi- ste dunque una famiglia di generatrici, ossia una funzione $F(q\ Q\ t)$. Poiché per ogni $t = t_0$ la trasformazione è canonica, sussiste la relazione

$$P_i dQ^i = p_i dq^i + dF_{/t=t_0}$$

nella quale $dF_{/t=t_0}$ denota l'espressione $\frac{\partial F}{\partial q^i} dq^i + \frac{\partial^2 F}{\partial Q^i} dQ^i$.

Aggiungendo e togliendo $\frac{\partial F}{\partial t} dt$ (1) si può scrivere

$$P_i dQ^i = p_i dq^i - \frac{\partial F}{\partial t} dt + dF$$

dove ora dF indica il differenziale totale di F nelle $2n+1$ variabili qQt. Questa relazione è fondamentale in dinamica.

8. Trasformazioni di contatto infinitesime.

Si consideri ancora la famiglia ad un parametro (7.10).

Il caso più interessante è quello in cui (7.10) costituiscano un gruppo ad un parametro (nel parametro t) ; sia $t = 0$ il valore del parametro corrispondente alla identità, cioè:

$$q^i = \phi^i(qp0) \; ; \; p_i = \psi_i(qp0)$$

La trasformazione corrispondente ad un valore δt piccolo del parametro è:

$$(8.1) \qquad Q^i = q^i + \xi^i \delta t \quad ; \quad P_i = p_i + \eta \delta t \; .$$

Si cominci col caso in cui le trasformazioni siano omogenee. Introducendo le (1) nella (2.6) si ha:

$$(8.2) \qquad \eta_i + p_k \frac{\partial \xi^k}{\partial q^k} = 0 \qquad\qquad p_k \frac{\partial \xi^i}{\partial p_k} = 0.$$

Se si introduce la funzione

$$(8.3) \qquad c = p_k \xi^k$$

---

(1) Si suppone F di classe opportuna in tutti i suoi argomenti.

si ha, utilizzando le (2)

$$(8.4) \qquad \frac{\partial c}{\partial q^i} = p_k \frac{\partial \xi^k}{\partial q^i} = -\eta_i \; ; \qquad \frac{\partial c}{\partial p_i} = \xi^i + p_k \frac{\partial \xi^i}{\partial p_k} = \xi^i \; .$$

Confrontando l'ultima con la (3) si ha

$$(8.5) \qquad c = p_k \frac{\partial c}{\partial p_k}$$

e quindi c è omogenea di primo grado nelle p.

Ciò si vede anche utilizzando la (3.9) che in questo caso si scrive

$$p_k \frac{\partial \xi^i}{\partial p_k} = 0 \qquad .$$

Le ξ^i sono cioé omogenee di grado zero nelle p e quindi, per la (3), c è omogenea di grado uno in queste variabili.

Viceversa, assegnata una funzione c delle q e delle p, omogenea di grado uno nelle p, le ξ e le η definite dalle (4) soddisfano le (2). Infatti si ha

$$p_k \frac{\partial \phi^k}{\partial p_i} = p_k \frac{\partial^2 c}{\partial p_i \partial p_k}$$

e questa è nulla perché c è omogenea di grado uno nelle p. Inoltre in virtù della (5)

$$p_i \frac{\partial \xi^i}{\partial q^k} = p_i \frac{\partial^2 c}{\partial p_i \partial q^k} = \frac{\partial c}{\partial q^k}$$

e quindi sussistono entrambe le (2).

In conclusione

Ogni trasformazione di contatto omogenea infinitesima è definita da equazione del tipo

$$Q^i = q^i + \frac{\partial c}{\partial p_i} \delta t \; ; \qquad P_i = p_i - \frac{\partial c}{\partial q^i} \delta t$$

dove c è omogenea di primo grado nelle p. Inoltre ogni funzione di questo tipo genera una trasformazione di contatto omogenea infinitesima.

Se la trasformazione non è omogenea, preso $p_{n+1} = -1$ le (6.3) si scrivono:

$$(8.6)\quad \eta_i - \frac{\partial \xi^{n+1}}{\partial q^i} + p_\alpha \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial q^i} = 0 \ ; \quad \frac{\partial \xi^{n+1}}{\partial p_\alpha} - p_\beta \frac{\partial \xi^\beta}{\partial p_\alpha} = 0 \quad (\alpha,\beta = 2\ldots n)$$

e se si pone

$$F = p_\alpha \xi^\alpha - \xi^{n+1}$$

si può scrivere infine:

$$\eta_i = - \frac{\partial F}{\partial q^i} \ ; \ \xi^\alpha = \frac{\partial F}{\partial p_\alpha} \ ; \ \xi^{n+1} = p_\alpha \frac{\partial F}{\partial p_\alpha} - F \ .$$

Viceversa per ogni funzione F delle $q^1\ldots q^{n+1}, p_1\ldots p_n$ le (6) sono soddisfatte e quindi la più generale TC non omogenea infinitesima è definita da equazioni della forma:

$$(8.7)\qquad \delta q^{n+1}(p_\alpha \frac{\partial F}{\partial p_\alpha} - F)\delta t ; \ \delta q^\alpha = \frac{\partial F}{\partial p_\alpha}\delta t ; \ \delta p_i = - \frac{\partial F}{\partial q^{\cancel{\alpha}}}\delta t$$

con F arbitraria.

Queste ultime relazioni sussistono nella stessa forma anche se la TC è ristretta.

9. Notazione compatta.

Nel seguito sarà conveniente, in qualche caso, disporre di una notazione compatta che renda più spediti i calcoli.

Denotando per comodità le variabili $q^1\ldots q^n$, $p_1\ldots p_n$ rispett. con $\omega^1\ldots\omega^{n+1}\ldots\omega^{2n}$, e introducendo la matrice antisimmetrica di ordine 2n:

$$(9.1)\qquad \varepsilon^{\alpha\beta} = \left|\begin{array}{c|c} 0 & I \\ \hline -I & 0 \end{array}\right|$$

(dove 0 e I denotano rispett. la matrice nulla e la matrice unità entrambe di ordine n), e i simboli $\partial_\alpha \equiv \frac{\partial}{\partial \omega^\alpha}$, si possono scrivere le

PP nella forma:

$$(f\ g) = \varepsilon^{\alpha\beta}\partial_\alpha f \partial_\beta g \tag{9.2}$$

mentre le condizioni di canonicità di una trasformazione $\omega \to \Omega$ si esprimono nella forma:

$$(\Omega^\mu\ \ \Omega^\gamma)_\omega = \varepsilon^{\mu\gamma}\ . \tag{9.3}$$

Questa notazione compatta rende molto spediti i calcoli. A titolo di esempio si può calcolare il commutatore di due operatori lineari $X_1 \ldots X_2$ del tipo

$$X_s = \frac{\partial f_s}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial f_s}{\partial q^i}\frac{\partial}{\partial p_i} \equiv \varepsilon^{\alpha\beta}\partial_\alpha f_s \partial_\beta \qquad (s=1,2)$$

Risulta per una generica funzione g

$$(X_1,X_2)g = \varepsilon^{ik}\partial_i f_1 \partial_k(\varepsilon^{r\ell}\partial_r f_2 \partial_\ell)g - \varepsilon^{r\ell}\partial_r f_2 \partial_\ell(\varepsilon^{ik}\partial_i f_1 \partial_k)g =$$

$$= \varepsilon^{ik}\varepsilon^{r\ell}(\partial_i f_1 \partial_k \partial_r f_2 \partial_\ell + \partial_i f_1 \partial_r\ f_2 \partial_k \partial_\ell - \partial_r f_2 \partial_\ell \partial_i f_1 \partial_k - \partial_r f_2 \partial_i f_1 \partial_\ell \partial_k)g =$$

$$= \varepsilon^{ik}\varepsilon^{r\ell}(\partial_i f_1 \partial_k \partial_r f_2 \partial_\ell - \partial_r f_2 \partial_\ell \partial_i f_i \partial_k)g$$

che mostra il fatto ben noto che il commutatore di X_1 e X_2 è un operatore lineare del primo ordine.

D'altra parte si ha pure

$$(f_1(f_2 g)) = \varepsilon^{ik}\partial_i f_1 \partial_k(\varepsilon^{r\ell}\partial_r f_2 \partial_\ell g)$$

e confrontando col secondo membro della (3) si vede che si può scrivere:

$$(X_1 X_2)g = (f_1(f_2 g)) - (f_2(f_1 g))$$

e, per l'identità di Jacobi

(9.4) $$(X_1X_2)g = (g(f_1f_2)) = \varepsilon^{\alpha\beta}\partial_\beta(f_if_k)\partial_\alpha g.$$

In particolare la (4) permette di controllare con facilità se un sistema del tipo:

(9.5) $$X_if = (f_i\ f) = 0 \qquad (i = 1...r < 2n)$$

è completo o no. Per es. se nella (4) risulta (v.III n° 1) per ogni i e k: $(f_if_k) = F_{ik}(f_1...f_r)$ si ha

$$(X_1X_2) = \varepsilon^{\alpha\beta}\partial_\beta F_{ik}\partial_\alpha = \varepsilon^{\alpha\beta}\frac{\partial F_{ik}}{\partial f_\sigma}\partial_\beta f_\sigma\partial_\alpha =$$

$$= -\frac{\partial F_{ik}}{\partial f_\sigma}X_\sigma .$$

Poiché i commutatori degli operatori X sono combinazioni lineari degli operatori stessi un sistema di tipo (5) è completo (CAP.I n. 5)

Nel seguito, a seconda della convenienza, si userà la notazione compatta o la notazione esplicita q p.