N. 1 - Premesse.

Sia $\mathfrak{F}$ l'insieme di tutte le funzioni di n variabili indipendenti $\omega^1,\dots,\omega^n$, con $\omega \equiv (\omega^1,\dots,\omega^n)$ variabile in un certo dominio di $\mathbf{R}^n$, che verifichino condizioni di regolarità tali da assicurare, analiticamente, la validità di ciò che si dirà nel seguito.

Nell'insieme $\mathfrak{F}$ ora considerato scegliamo n^2 funzioni,(1)

$$\eta^{\alpha\beta}(\omega) \qquad\qquad (\alpha,\beta = 1,\dots,n)$$

antisimmetriche in α e β e che verifichino la proprietà

$$(1.1.) \qquad \eta^{\lambda\mu}\frac{\partial\eta^{\nu\rho}}{\partial\omega^\mu} + \eta^{\nu\mu}\frac{\partial\eta^{\rho\lambda}}{\partial\omega^\mu} + \eta^{\rho\mu}\frac{\partial\eta^{\lambda\nu}}{\partial\omega^\mu} = 0;$$

con esse formiamo una matrice funzionale antisimmetrica

$$(\eta^{\alpha\beta}(\omega))$$

mediante la quale possiamo definire la P.P.G. fra due funzioni (cfr. |3| pag. 413) e costruire, partendo da insiemi di s funzioni indipendenti di $\mathfrak{F}$ $(s \leq n)$, gruppi di funzioni generalizzati (G.F.G.) di rango $r (s \leq r \leq n)$, singolari e non singolari, a seconda che la matrice $(\eta^{\alpha\beta}(\omega))$ sia singolare o no (cfr. risp. [5] e [2]).

Nel caso in cui $(\eta^{\alpha\beta}(\omega))$ è non singolare (2) si ha che $\mathfrak{F}$ è un G.F.G. e che ogni altro gruppo di rango $r \leq n$ risulta essere un suo sottogruppo di funzioni generalizzato (S.G.F.G.); inoltre, poiché $\mathfrak{F}$ è un'algebra(3),

(1) E' chiaro, da quanto segue, che n almeno di queste funzioni sono nulle.

(2) Si ricordi che in tal caso n dev'essere un numero pari.

(3) Con l'usuale operazione di prodotto fra due funzioni

ha senso eseguire, fra funzioni appartenenti ai suoi diversi S.G.F.G., tutte le operazioni definite in $\mathfrak{F}$ stesso, e cercare quindi nuovi S.G.F.G. che siano legati a queste operazioni, cioè alle varie strutture di cui $\mathfrak{F}$ è munito.

Una ricerca dello stesso tipo è lecito fare nel caso in cui $(\eta^{\alpha\beta}(\omega))$ è singolare [4], ma c'è da tener presente alcune differenze rispetto al caso non singolare. Se il rango di $(\eta^{\alpha\beta}(\omega))$ e $n-k$, esistono k funzioni neutre indipendenti (cfr. [4]) ed è possibile determinare in $\mathfrak{F}$ una base (canonica) formata da $(n-k)$ funzioni non neutre e da k funzioni neutre (cfr. [5] Teor. IV); da ciò si ha che l'insieme $\mathfrak{F}$ viene ripartito in due sottoinsiemi: un G.F.G.S. di rango $n-k$ [5], ed un sottoinsieme N i cui elementi sono tutte e sole quelle funzioni che dipendono da ω per il tramite di k qualsiasi funzioni neutre indipendenti.

Nel seguito noi tratteremo dapprima il caso in cui $(\eta^{\alpha\beta}(\omega))$ è non singolare, ed in un secondo tempo il caso singolare.

Inoltre, senza ledere la generalità degli argomenti trattati e per facilità di esposizione, supporremo di fissare in $\mathfrak{F}$, una volta per tutte, una funzione $f \neq 0$ e due G.F.G. G_r e $G_{r'}$ di rango r ed r' rispettivamente.

---

(4) In tal caso n può essere sia pari che dispari (cfr. [5]).

(5) $n-k$ risulta essere sempre un numero pari.

N.2 - S.G.F.G.(1) generato in dalla somma di f e di G_r.

Consideriamo il sottoinsieme di $\mathfrak{F}$:

$$H = \{h \in \mathfrak{F} / \ h = f + g \quad \text{con} \quad g \in G_r\}$$

che diciamo somma di f e di G_r.

Se
$$h = f + g$$
$$h' = f + g'$$

sono due funzioni di H, si ha:

$$(h,h')^* = (f+g,f+g')^* = (f,f)^* + (f,g')^* + (g,f)^* + (g,g')^*. \tag{2.1}$$

Dalla presenza nel 2° membro della (2.1) del secondo e del terzo addendo, si deduce che H in generale non è un S.G.F.G. di $\mathfrak{F}$; infatti ciò si verifica solo se:

(a) $$(f,g')^* = (g,f)^* = 0$$

cioé nel caso che f appartiene al S.G.F.G. reciproco di G_r, oppure se:

(b) $f,g')^*$ e $(g,f)^*$ sono funzioni di G_r, cioé nel caso che $f \in G_r$.(2)

---

(1) Nei N. 2,...,8 è trattato il caso in cui $(n^{\alpha\beta}(\omega))$ è non singolare, come già annunciato.

(2) Se fosse $(\cdot)(f,g'-g)^* = f+\bar{g}$ $\quad \forall g,g' \in G_r$, con $\bar{g} \in G_r$
allora considerate due altre funzioni h,h' in G_r, sarebbe anche:
$$(\cdot\cdot)(f,h'-h)^* = f+\bar{h} \quad \text{con } \bar{h} \in G_r$$
Sottraendo $(\cdot\cdot)$ da $(\cdot)$ si avrebbe:
$$(f,(g'-g)-(h'-h))^* = (\bar{g}-\bar{h}) \in G_r$$
Tenendo presente che G_r è spazio vettoriale, dall'arbitrarietà di g,g',h,h' si verificherebbe che:
$$(f,\tilde{g})^* \in G_r \qquad \forall\, \tilde{g} \in G_r$$
il che comporta ovviamente che $f \in G_r$.

Supponiamo ora che le condizioni (a) e (b) non siano verificate. Allora osserviamo che, essendo $H \subseteq \mathfrak{F}'$, ed essendo $\mathfrak{F}$ un G.F.G., è non vuota la famiglia dei S.G.F.G. di $\mathfrak{F}'$ che contengono H, in quanto ad essa appartiene $\mathfrak{F}$ stesso; non solo, ma tale famiglia è finita, e quindi l'intersezione dei suoi elementi è ancora un S.G.F.G. di $\mathfrak{F}$ (cfr.[1] pag. 283) contenente H; se ne trae che il S.G.F.G. minimo contenente H è proprio l'intersezione dei S.G.F.G. che contengono H stesso: indichiamo tale S.G.F.G. minimo con H^*. Sia ora

$$\phi_1,\dots,\phi_r$$

sempre nell'ipotesi che le condizioni (a) e (b) non siano verificate, una base di G_r.

Poiché $f \notin G_r$, le (r+1) funzioni:

$$f,\phi_1,\dots,\phi_r$$

sono indipendenti, e partendo da esse si può costruire un G.F.G. G_s ($s \geq r+1$) contenente senz'altro H, e che è ancora un S.G.F.G. di $\mathfrak{F}'$.

G_s lo diciamo S.G.F.G. di $\mathfrak{F}'$ generato da H.

Facciamo vedere ora che

$$G_s = H^*$$

$G_s \supseteq H^*$: infatti, poiché H^* è contenuto in ogni S.G.F.G. contenente H, è contenuto anche in G_s.

$G_s \subseteq H^*$: infatti, detto $\bar{G}$ un qualsiasi S.G.F.G. di $\mathfrak{F}'$ contenente H, si ha che ad esso appartengono le funzioni $f,\phi_1,\dots,\phi_r$ e quindi

$$\bar{G} \supseteq G_s .$$

Ora, essendo H^* l'intersezione di tutti i gruppi del tipo di $\bar{G}$, risulta anche $H^* \supseteq G_s$.

Con una notazione usuale in algebra indichiamo $H^{*} = G_s$ con $< H >$.

N. 3 - <u>S.G.F.G. generato in $\mathfrak{F}$ dall'unione di f con G_r</u>.

Consideriamo il sottoinsieme di $\mathfrak{F}'$

$$U = \{f\} \cup G_r$$

e, per evitare argomentazioni banali, supponiamo che $f \notin G_r$.

Se h, h' sono due funzioni distinte di $\mathcal{U}$, si possono verificare due casi

(a') $(h,h')^{*} \in G_r$ se $\begin{matrix} h \\ h' \end{matrix} \in G_r$

(b') $(h,h')^{*} \notin G_r$ se una delle due funzioni h,h' coincide con f.

Inoltre si ha:

(b') $\Longrightarrow (h,h')^{*} \notin U$

e quindi in generale $\mathcal{U}$ non è S.G.F.G. di $\mathfrak{F}$.

Consideriamo ora la base di G_r.

$$\phi^1, \ldots, \phi^r \; ;$$

la $(r+1)$-upla di funzioni

$$(3.1) \qquad f, \phi^1, \ldots, \phi^r$$

risulta essere indipendente e quindi, a partire da essa, si può costruire in $\mathfrak{F}$, un S.G.F.G., $< U >$, che coincide senz'altro con il S.G.F.G. $< H >$ del N. precedente; $<U>$ inoltre risulta banalmente essere anche il minimo S.G.F.G. di $\mathfrak{F}'$ contenente U, e quindi in conclusione si ha la seguente:

Proposizione (1.3)

I due sottoinsiemi di $\mathfrak{F}'$, H ed U generano lo stesso S.G.F.G. di $\mathfrak{F}$.

N. 4 - S.G.F.G. generato in $\mathfrak{F}'$ dalla somma di G_r e di $G_{r'}$.

Consideriamo il sottoinsieme di $\mathfrak{F}$

$$H' = G_r + G_{r'} = \{h \in \mathfrak{F} \ / \ \exists f \in G_r \ \text{ e } \ \exists f' \in G_{r'} \ \ni' \ h = f + f'\}.$$

Dette h, h' due funzioni di H', se

$$h = f + f'$$
$$h' = g + g'$$

con $f \in G_r$, $f' \in G_{r'}$, si ha:

(4.1) $(h,h')^* = (f + f', g + g') = (f,g)^* + (f,g')^* + (f',g)^* + (f',g')^*$.

Dalla presenza nel 2° membro della (4.1) del 2° e 3° addendo si deduce che in generale H' non è un S.G.F.G. di $\mathfrak{F}$;

; più precisamente H' risulta essere un S.G.F.G. se si verifica una delle seguenti circostanze:

c) $(f,g')^* = (f,g)^* = 0$, cioé se G_r e $G_{r'}$ sono tali che uno sia sottogruppo del gruppo reciproco dell'altro,

d) $G_r \subseteq G_{r'}$ oppure $G_{r'} \subseteq G_r$.

Supponiamo ora che le condizioni c) e d) non siano verificate; in tal caso H' non è senz'altro un S.G.F.G. di $\mathfrak{F}'$, non solo, ma essendo non vuota la famiglia dei S.G.F.G. di $\mathfrak{F}$ che contengono H', in quanto anche in questo caso vi appartiene $\mathfrak{F}$ stesso, considerata l'intersezione degli elementi di tale famiglia, otteniamo il S.G.F.G. di $\mathfrak{F}$ contenente H', e che indichiamo con $\bar{H}^*$.

Siano ora:

$\bar{r}$ = max numero di funzioni indipendenti in H'

$\phi^1,\dots,\phi^{\bar{r}}$ $\bar{r}$ funzioni indipendenti in H' .

A partire dalle $\bar{r}$ funzioni $\phi^1,\dots,\phi^{\bar{r}}$ costruiamo un S.G.F.G. di $\mathfrak{F}$, di rango $\bar{s}(\bar{s} \geq \bar{r})$, e che indichiamo con $G_{\bar{s}}$.

Risulta:

$$H' \subset G_{\bar{s}} \; ; \tag{4.2}$$

infatti se $h \in H'$, essa è una funzione che dipende da ω per il tramite delle $\phi^1,\dots,\phi^{\bar{r}}$, altrimenti sarebbe indipendente da esse e quindi $\bar{r}$ non sarebbe il massimo numero di funzioni indipendenti di H'.

Inoltre,con un ragionamento analogo a quello adottato al N. 2, si può provare che

$$\bar{H}^* = G_{\bar{s}} \quad .$$

$G_{\bar{s}}$ lo diciamo ancora S.G.F.G. generato in $\mathfrak{F}'$ da H', e con notazione algebrica scriviamo:

$$G_{\bar{s}} = \langle H' \rangle \quad .$$

Vale quindi la

Proposizione (1.4). Il S.G.F.G. di $\mathfrak{F}'$ generato da H' è il minimo S.G.F.G. di $\mathfrak{F}$ che contiene H' stesso.

N. 5 - S.G.F.G. di $\mathfrak{F}$ generato da $G_r \cup G_{r'}$.

Consideriamo il sottoinsieme di $\mathfrak{F}'$:

$$U' = G_r \cup G_{r'} .$$

Indicate con f, g due funzioni di U', è chiaro che, nel caso che $f \in G_r$ e $g \in G_{r'}$, $(f,g)^* \notin U'$ se non quando siano verificate le condizioni c) e d) del N. 4.

Supposto che ciò non accada osserviamo che

$$U = \bigsqcup_{f \in G_r} (f \cup G_{r'})$$

e

$$H' = \bigsqcup_{f \in G_r} (f + G_{r'}) .$$

Ricordando la proposizione (1.3), si ha:

$$\langle f \cup G_{r'} \rangle = \langle f + G_{r'} \rangle \Longrightarrow \bigsqcup_{f \in G_r} \langle f \cup G_{r'} \rangle = \bigsqcup_{f \in G_r} \langle f + G_{r'} \rangle \Longrightarrow$$

$$\langle \bigsqcup_{f \in G_r} \langle f \cup G_{r'} \rangle \rangle = \langle \bigsqcup_{f \in G_{r'}} \langle f + G_{r'} \rangle \rangle \Longleftrightarrow \langle U' \rangle = \langle H' \rangle .$$

Si ha quindi:

Proposizione (1.5). Il S.G.F.G. di $\mathfrak{F}'$ generato dalla somma di G_r e $G_{r'}$ coincide con quello generato dalla loro unione.

N. 6 - S.G.F.G. generati in $\mathfrak{F}'$ dal prodotto e dalla P.P.G. di f con G_r.

Ci proponiamo ora di vedere come i S.G.F.G. di $\mathfrak{F}$ generati dai suoi due sottoinsiemi :

$$\Pi = \{p \in \mathfrak{F} / p = f\cdot g \quad \text{con} \quad g \in G_r\}.$$

$$P = \{k \in \mathfrak{F} / k = (f,g)^* \quad \text{con} \quad g \in G_r\}$$

detti rispettivamente prodotto e P.P.G. di f con G_r, coincidono entrambi col S.G.F.G. $< H >=< U >$.

Intanto, se $p = f\cdot g$ e $p' = f\cdot g'$ sono due funzioni di Π e se $k = (f\cdot g)^*$ e $k' = (f,g')^*$ sono due funzioni di P, dal fatto che

$$(p,p') = gg'(f,f)^* + fg'(g,f)^* + fg(f,g')^* + f^2(g,g')^*$$

e dal fatto che $(k,k')^*$ è una funzione che dipende dalle ω per il tramite delle derivate delle $\eta^{\alpha\beta}$ e di f oltre che da quelle di g e g' segue che Π e P non sono S.G.F.G. di $\mathfrak{F}'$ se non quando sono verificate le condizioni a) e b) del N. 2.

Nel caso poi che tali condizioni non sono verificate, i S.G.F.G. di $\mathfrak{F}'$ generati da Π e P sono proprio quelli costruiti a partire dalle $r + 1$ funzioni (indipendenti).

$$f, \phi^1, \ldots, \phi^r$$

dove $(\phi^1, \ldots, \phi^r)$ è una base di G_r.

Vale dunque il seguente

Teorema (1.6) I S.G.F.G. generati in $\mathfrak{F}$ dal prodotto e dalla P.P.G. di f con G_r coincidono con i S.G.F.G. generati dalla somma e dall'unione di f con G_r; si ha cioé:

$$< H >=< U >=< \Pi > = < P > .$$

N. 7 - S.G.F.G. generati in $\mathfrak{F}'$ dal prodotto e dalla P.P.G. di G_r con $G_{r'}$.

Siano

$$\Pi' = \{p \in \mathfrak{F}'/p = f\cdot g \quad \text{con} \quad f \in G_r \quad e \quad g \in G_{r'}\}$$

$$P' = \{k \in \mathfrak{F}'/k = (f,g)^* \quad \text{con} \quad f \in G_r \quad e \quad g \in G_{r'}\}$$

due sottoinsiemi di $\mathfrak{F}'$ che chiamiamo prodotto e P.P.G. di G_r con $G_{r'}$.

Con argomentazioni analoghe a quelle esposte al N. 6 è facile vedere che essi non sono due S.G.F.G. di $\mathfrak{F}'$, se non quando ci si pone nelle condizioni c) e d) del N. 4. Inoltre, se tali condizioni non sono verificate, dal fatto che

$$\Pi' = \bigsqcup_{f\in G_r} f\cdot G_{r'}$$

e

$$P' = \bigsqcup_{f\in G_r} (f,G_{r'})^*$$

e tenendo presente quanto detto al N. precedente, segue facilmente che:

$$(7.1) \qquad \langle H'\rangle = \langle U'\rangle = \langle \Pi'\rangle = \langle P'\rangle ,$$

e che quindi vale il

Teorema (1.7). I S.G.F.G. di $\mathfrak{F}'$ generati dal prodotto e dalle P.P.G. di G_r e $G_{r'}$ coincidono con quelli generati dalla loro somma e dalla loro unione.

N.8 - Caso dei G.F.G.S.

Supponiamo ora che la matrice $(\eta^{\alpha\beta}(\omega))$, di cui al N. 1, sia singolare; vediamo se anche in questo caso sono validi i teoremi (1.6) e (1.7) e, qualora non lo siano, se è possibile modificarne l'enunciato in modo tale da renderli validi nel caso singolare.

Noi sappiamo che le ipotesi più restrittive in cui valgono i suddetti teoremi sono quelle espresse dalle condizioni a) e b) del N. 2 per il teorema (1.6) e quelle espresse dalle condizioni c) e d) del n. 4 per il Teorema (1.7).

Sappiamo pure che (cfr.[5] Teor. I) l'insieme N di funzioni definito al N. 1 è un sottoinsieme del gruppo reciproco di ogni G.F.G.S.; si deduce da ciò che le condizioni a),b),c) e d), pur potendo esprimere circostanze diverse nei due casi, singolare e non singolare, conservano per entrambi le medesima validità nella forma; si può dunque concludere che i due succitati teoremi continuano a valere, sotto le stesse ipotesi, anche nel caso dei G.F.G.S.

N.9 - Conclusioni.

Fra tutte le operazioni che si possono definire fra gli elementi dei diversi Gruppi di Funzioni Generalizzati singolari e non singolari, definiti da una medesima matrice, la somma, l'unione, il prodotto e la P.P.G., sono tali da originare degli insiemi di funzioni, in generale diversi fra loro, i quali però generano tutti lo stesso Gruppo di Funzioni generalizzato.