$$\lambda,\mu = 1 \ldots n_1 + (a_1+a_2)$$

$$i,k = 1 \ldots n_1 \quad .$$

In definitiva vale il seguente:

Teorema IV. Dato un gruppo di funzioni di n variabili, di rango r, e non commutativo, esiste sempre un gruppo di rango n di cui esso è un sottogruppo, in cui si può scegliere una base

$$\phi^1,\ldots,\phi^{n_1+(a_1+a_2)},\psi_1,\ldots,\psi_{n_1} \qquad (2n_1+ a_1+a_2 = n)$$

che verifica le condizioni:

$$(5.4) \quad \begin{cases} (\phi^\mu,\phi^\lambda)^* = 0 \\ (\psi_i,\psi_k)^* = 0 \\ (\phi^\mu,\psi_k)^* = \delta^\mu_k \end{cases} \qquad \begin{array}{l} \lambda,\mu = 1,\ldots,n_1+(a_1+a_2) \\ i,k = 1, \ldots,n_1 \; . \end{array}$$

§ 6. <u>Base canonica in un gruppo di rango massimo.</u>

E' noto (cfr.[3]) che la validità del teorema IV del § precedente nel caso dei gruppi generalizzati non singolari equivale all'esistenza, in un gruppo di rango massimo G_n, di una base $f^1,\ldots,f^n$ che verifichi le condizioni di canonicità (cfr.[4]pag. 414).

$$(6.1) \qquad (f^i,f^j)^*(\omega_1,\ldots,\omega_n) = \eta^{ij}(f^1,\ldots,f^n) \; .$$

Ci si chiede se è sempre possibile trovare una tale base anche in un gruppo generalizzato singolare, con P.P.G. definita da una matrice $(\eta^{\mu\nu}(\omega))$ singolare.

Si consideri all'uopo l'insieme di tutte le funzioni

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

che godano di tutte le proprietà di regolarità di cui al § 1, e la matrice

$$\eta(x,y,z) = \begin{vmatrix} 0 & x & 0 \\ -x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

E' chiaro che, comunque si considerino tre funzioni ϕ_1,ϕ_2,ϕ_3 indipendenti in S, il gruppo generalizzato costruito a partire ϕ_1,ϕ_2,ϕ_3 con la P.P.G. definita dalla matrice data η è un sottoinsieme di S ed ha senso chiedersi se in tale gruppo esistono tre funzioni indipendenti di S f^1,f^2,f^3 che verifichino le (6.1), cioé il sistema:

$$(6.2)\qquad \begin{cases} (f_1,f_2)^* = x\,\dfrac{\partial f_1}{\partial x}\,\dfrac{\partial f_2}{\partial y} - x\,\dfrac{\partial f_1}{\partial y}\,\dfrac{\partial f_2}{\partial x} = f_1 \\[2ex] (f_1,f_3)^* = x\,\dfrac{\partial f_1}{\partial x}\,\dfrac{\partial f_3}{\partial y} - x\,\dfrac{\partial f_1}{\partial y}\,\dfrac{\partial f_3}{\partial x} = 0 \\[2ex] (f_2,f_3)^* = x\,\dfrac{\partial f_2}{\partial x}\,\dfrac{\partial f_3}{\partial y} - x\,\dfrac{\partial f_2}{\partial y}\,\dfrac{\partial f_3}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

Se consideriamo lo Jacobiano di f^1,f^2,f^3, si ha

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x} & \dfrac{\partial f_3}{\partial x} \\ \\ \dfrac{\partial f_1}{\partial y} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y} & \dfrac{\partial f_3}{\partial y} \\ \\ \dfrac{\partial f_1}{\partial z} & \dfrac{\partial f_2}{\partial z} & \dfrac{\partial f_3}{\partial z} \end{vmatrix} = \frac{\partial f_3}{\partial z}\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\frac{\partial f_2}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial x}\frac{\partial f_1}{\partial y} \right)$$

dove si è sviluppato J secondo gli elementi della $3^{\underline{a}}$ riga, e si è tenuto conto che i minori di $\frac{\partial f_1}{\partial z}$ $\frac{\partial f_2}{\partial z}$ sono nulli per la $2^{\underline{a}}$ e $3^{\underline{a}}$ delle (6.2).

RIcavando poi dalle stesse equazioni $\frac{\partial f_1}{\partial x}$ e $\frac{\partial f_2}{\partial x}$ e sostituendo nello sviluppo di J, si ottiene

$$J = 0$$

Ciò vuol dire che f^1, f^2, f^3 sono dipendenti, e quindi non è possibile trovare una base canonica nel gruppo generato da ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3.

Si deduce che in ~~generale~~, in un gruppo generalizzato di funzioni di rango massimo, non esiste una base che verifichi le condizioni (6.1).

§ 7. Conclusioni.

L'assegnare una matrice quadrata $(\eta^{\alpha\beta}(\omega_1,\ldots,\omega_n))$, singolare, antisimmetrica e di ordine n ed s funzioni $F_i(\omega_1,\ldots,\omega_n)$, con $s \leq n$, permette di costruire un gruppo generalizzato singolare di funzioni.