

UNA PARTICOLARE CONFIGURAZIONE DINAMICA
NELLA MATEMATICA FINANZIARIA

M. GIORDANO *

SOMMARIO.

Il presente lavoro rappresenta un ulteriore tentativo di studio dei rapporti tra problemi meccanici e problemi finanziari.

Si cerca di determinare una analogia meccanico-finanziaria partendo dall'analogia presentata dalla condizione di riposo di un sistema meccanico e la condizione statica di un bene monetario.

Si studiano alcune situazioni finanziarie, capitalizzazione, sconto, rendita partendo da considerazioni meccaniche logicamente equivalenti a quelle finanziarie.

Il metodo adoperato è quello induttivo a stretta analogia.

E' noto come, Samuelson, Malthus, Edgeworth, Amoroso, Ramsey, Fischer si siano abbondantemente interessati di questo problema analogico. Koopmans, 1951, è stato, a mio avviso, l'ultimo a dedicarsi a questo tipo di studio meccanico finanziario. [1], [2], [3], [4], [5], [6] .

Supponiamo che ogni beneficio proveniente dell'impiego di un bene monetario possa essere espresso attraverso una configurazione oggettiva caratterizzante del tipo:

1)
$$U(t, x, \dot{x})$$

allora il beneficio totale che proviene dal sistema in un intervallo di tempo finito $[0, T]$, lo possiamo scrivere

2)
$$\int_0^t U(x, \dot{x}, t) dt$$

(*) - Dell'Università degli Studi di Lecce - Istituto di Matematica. (ITALY)

La 2) dipende dalla posizione e dalla direzione (x, \dot{x}) scelte nel sistema istante per istante dal tempo 0 (inizio dell'operazione finanziaria) al tempo T (termine dell'operazione finanziaria). La 1) dipende cioè dalla traiettoria $x(t)$ percorsa dal sistema monetario durante l'intervallo $[0, T]$.

E' facile constatare che l'espressione

$$U(x, \dot{x}, t)$$

rappresenta benefici finanziari positivi se il sistema finanziario seguirà una traiettoria tale da massimizzare la 1). Se invece la 1) è tale che la traiettoria sia minima attraverso la minimizzazione della 2) allora abbiamo benefici o costi negativi, o perdite finanziarie.

D'altra parte, in una qualsivoglia operazione finanziaria, da un lato c'è un agente che aspira a massimizzare la 1) (colui che impiega, per esempio, il bene monetario) dall'altro lato invece si pone un agente (l'istituto di credito, per esempio) che vuole minimizzare la 2).

Notiamo così che nel primo caso l'integrale

$$\int_0^t U(x, \dot{x}, t) dt$$

dovrà essere massimizzato rispetto a x_1, x_2, \dots, x_i dall'altro minimizzato rispetto a $x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_n$. [7]

TEOREMA 1).

In ogni sistema finanziario l'integrale

$$3) \quad \int_0^T U(x, \dot{x}, t) dt = \int_0^T U(x, \dot{x}) e^{-\int_0^t \delta(z) dz} dt$$

rappresenta il valore attuale dei benefici positivi e negativi nell'intervallo

$[0, T]$ dell'intera operazione finanziaria, e l'integrale 2) è il valore attuale dell'intero sistema monetario.

Dimostrazione.

In regime di capitalizzazione composta, posto con [8]

$$4) \quad dU_t = U_t i_t dt$$

l'incremento capitale funzione del tempo, e supposto unitario il capitale (dove U_t è un beneficio monetario unitario ed i_t è il tasso effettivo d'investimento) abbiamo

$$5) \quad \frac{dU_t}{U_t} = i_z dt. \quad i_z = \delta(t) \text{ tasso istantaneo d'investimento}$$

Integrando la 5) abbiamo

$$\int_0^T \frac{dU_t}{U_t} - dt = \int_0^T \delta(t) dt$$

ossia

$$\log U_t = \int_0^T \delta(t) dt$$
$$U_t = e^{\int_0^T \delta(t) dt}$$

Segue che il tasso istantaneo di sconto è $\frac{1}{U_t}$

ovvero

$$\frac{1}{U_t} = e^{-\int_0^T \delta(t) dt}$$

Per cui, sempre in regime di capitalizzazione composta, risulta

$$U(x, \dot{x}, t) = U(x, \dot{x}) e^{-\int_0^T \delta(t) dt}$$

e quindi l'integrale 2) diviene

$$6) \quad \int_0^T U(x, \dot{x}, t) dt = \int_0^T U(x, \dot{x}) e^{-\int_0^t \delta(z) dz} dt$$

che è proprio l'espressione 3).

Allora l'espressione del valore di un bene monetario che fa nascere un capitale $u(t)$ lire al giorno per T anni al tasso istantaneo di interesse annuo $\delta(t)$ è una rendita del tipo

$$7) \quad V(t) = \int_t^T u(t) e^{-\int_t^t \delta(z) dz} dt.$$

La 6) è allora una espressione più generale che può anche e soprattutto essere adattata allo studio dell'ammortamento nel continuo.

Dimostriamo infatti come sia possibile ammortizzare un capitale unitario e con il metodo progressivo partendo dalla condizione differenziale.

$$8) \quad R(t) + R(t) \delta(t) dt - \alpha(t) dt = R(t) + dR(t)$$

Nella 8) t = origine fissa dell'operazione finanziaria

$\alpha(t)$ = velocità di versamento

$R(t)$ = debito residuo al tempo t

$[t, t+dt]$ = intervallo di tempo in cui avviene la trasformazione del debito residuo.

$\delta = \log(1+i)$ = forza di interesse.

Notiamo che nell'intervallo di tempo $[t, t+dt]$ il debito residuo diviene $R(t) + R(t) \delta(t) dt$ e poiché si paga $\alpha(t) dt$ e tenendo ancora presente che $R(t) \delta(t) dt$ è la quota infinitesima di interesse, la 8) diviene con opportune semplificazioni:

$$9) \quad \frac{dR(t)}{dt} - R(t) \delta(t) + \alpha(t) = 0$$

dove la quantità $\alpha(t) - R(t)\delta t$ è la quota di capitale rimborsata.

Moltiplicando la 9) per $e^{-\int_{t_0}^t \delta(z) dz}$ abbiamo

$$10) \quad \frac{d}{dt} \left[R(t) e^{-\int_{t_0}^t \delta(z) dz} \right] = -\alpha(t) e^{-\int_{t_0}^t \delta(z) dz}$$

Integrando questa e tenendo conto che deve essere inizialmente $R(t_0) = 1$, abbiamo:

$$11) \quad R(t) e^{-\int_{t_0}^t \delta(z) dz} - 1 = - \int_{t_0}^t \alpha(u) e^{-\int_{t_0}^u \delta(z) dz} du$$

da cui integrando per parti:

$$12) \quad R(t) = e^{-\int_{t_0}^t \delta(z) dz} \left[1 - \int_{t_0}^t \alpha(u) e^{-\int_{t_0}^u \delta(z) dz} du \right]$$

E poiché deve anche essere $R(t_0 + \tau) = 0$, risulta:

$$13) \quad \int_{t_0}^{t_0 + \tau} \alpha(u) e^{-\int_{t_0}^u \delta(z) dz} du = 1$$

La 13) dimostra che il valore attuale di una rendita certa, continua, posticipata, unitaria con velocità di versamento $\alpha(u)$, dove u varia nell'intervallo $[t_0, t_0 + \tau]$, uguaglia l'ammontare del prestito.

Tenendo conto della 13) la 12) diviene

$$14) \quad R(t) = e^{-\int_{t_0}^t \delta(z) dz} \int_t^{t_0 + \tau} \alpha(u) e^{-\int_{t_0}^u \delta(z) dz} du$$

Ma essendo

$$-\int_{t_0}^u \delta(z) dz = -\int_{t_0}^t \delta(z) dz - \int_t^u \delta(z) dz$$

abbiamo che

$$15) \quad R(t) = \int_t^{t_0+\tau} \alpha(u) \cdot e^{-\int_t^u \delta(z) dz} du \quad \text{con } T = t_0 + \tau$$

La 14) confrontata con 7) fà vedere come la velocità di versamento $\alpha(u)$ corrisponde alla grandezza $u(t)$ ivi definita.

La particolarità della 15) risiede nel fatto che essa rappresenta il debito residuo al tempo t , cioè il valore al tempo t del capitale monetario che ancora deve essere versato con continuità da t a $t_0 + \tau$ per compiere l'ammortamento.

Inoltre, con semplici calcoli, abbiamo che

$$16) \quad R(t) = \int_t^{t_0+\tau} \alpha(u) e^{-\int_t^u \delta(z) dz} du \equiv \int_0^T U(x, \dot{x}) e^{-\int_0^t \delta(z) dz} dt.$$

Dalla 7) ancora, nel caso di una rendita annua, poniamo $u(t) = a > 0$ con $a = \text{costante}$ e sotto l'ipotesi restrittiva che anche il tasso di interesse sia costante, il valore della rendita annuale ad ogni istante t risulta dato da

$$17) \quad V(t) = a \int_t^T e^{-\delta(\tau-t)} dT = \begin{cases} a(1-e^{-\delta(T-t)}) & \text{con } \delta \neq 0 \\ a(T-t) & \text{con } \delta = 0 \end{cases}$$

Ed ancora

$$18) \quad V(t) = a\delta^{-1} \quad \text{se la rendita è perpetua.}$$

Dalla 18) possiamo osservare che se l'annualità è finita e se $\delta > 0$ allora la rendita è svalutabile.

E' interessante notare che anche nei prestiti divisi in obbligazioni è valida la 7).

Se infatti il prestito obbligazionario rende una lira annua per T anni al prezzo di rimborso P , e se il tasso di interesse è costante, allora il valore del prestito in ciascun istante t è

$$\begin{aligned} 19) \quad V(t) &= a \int_t^T e^{-\delta(\tau-t)} d\tau + P \cdot e^{-\delta(T-t)} = \\ &= \frac{a}{\delta} + \left(P - \frac{a}{\delta} \right) e^{-\delta(T-t)} \end{aligned}$$

Se il prezzo P di rimborso è alla pari risulta

$$20) \quad a = \alpha P$$

con α = tasso di interesse nominale del prestito obbligazionario la 18) diviene

$$21) \quad V(t) = P + (\alpha - \delta) \frac{P}{\delta} (1 - e^{-\delta(T-t)})$$

Notiamo allora che il valore dell'obbligazione ad un dato istante, dipende semplicemente dalla relazione che intercorre tra tasso di interesse nominale e tasso di interesse di mercato δ .

Abbiamo i seguenti tre casi:

- a) Se $\alpha > \delta$ allora abbiamo la svalutazione del prestito. (Rimborso sopra la pari).
- b) Se $\alpha < \delta$ abbiamo una valutazione del prestito e $t < T$ (Rimborso sotto la pari).

c) Se $\alpha = \delta$ il valore del prestito è costante. (Rimborso alla pari).

Certamente, questo lavoro non esaurisce l'argomento, anzi è auspicabile un ulteriore più attento esame della questione.

Da parte mia è in studio l'aspetto dinamico della valutazione del vantaggio marginale di certe operazioni finanziarie.