$$d_{\mathbb{R}^2}((x_1,x_2),(y_1,y_2)) \leq d_{\mathbb{R}^2}((x_1,x_2),(y_1,x_2)) + d_{\mathbb{R}^2}((y_1,x_2),(y_1,y_2)) =$$

$$= d_{\mathbb{R}^2}(F_1(x_1),F_1(y_1)) + d_{\mathbb{R}^2}(F_2(x_2),F_2(y_2)) \leq d_{\mathbb{R}}(x_1,y_1)$$

$$+ d_{\mathbb{R}}(x_2,y_2) = 0 + 0 = 0 .$$

Quindi $d_{\mathbb{R}^2}(x,y) = 0$ per ogni $(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

C.V.D.

Più in generale, per ogni spazio localmente convesso e di Hausdorff E, abbiamo (cfr. [15])

$$C_E = d_E = 0 \quad .$$

§ 2.2. APPLICAZIONI.

DEFINIZIONE 2.2.1. Il cono Ω dicesi regolare se la sua chiusura $\bar{\Omega}$ non contiene rette.

Valgono inoltre i risultati seguenti.

PROPOSIZIONE 2.2.1. (cfr. [15])

Se il cono convesso aperto Ω è regolare allora C_Ω e d_Ω sono distanze. Viceversa se C_Ω (o d_Ω) è una distanza, allora Ω è regolare.

PROPOSIZIONE 2.2.2.(cfr. [3]) .

La topologia relativa di Ω in E è equivalente alla topologia definita da C_Ω o d_Ω , se, e soltanto se, tutte le sezioni piane di

Ω *hanno aperture uniformemente limitate cioè se, per ogni* $x \in \Omega$ *ed ogni seminorma continua* p *su* Ω *esiste una costante* $k > 0$ *tale che* $\{y \in E : p(x-y) = k\} \not\subset \Omega$.

IL CONO DEGLI ELEMENTI HERMITIANI POSITIVI.

Sia A un'algebra di Banach complessa con elemento identico e, cioé A è un'algebra complessa in cui è definita una norma $\|\ \|$ rispetto alla quale A è di Banach ed inoltre è verificata la proprietà $\|x\cdot y\| \leq \|x\|\cdot\|y\|$ per ogni $x,y \in A$.

Ricordiamo che per ogni $x \in A$ lo spettro di x, Spx, è l'insieme $\{\lambda \in \mathbb{C} : x - \lambda e$ non è invertibile$\}$.

Supponiamo ancora che in A sia definita una involuzione continua $*$ rispetto alla quale A sia simmetrica, cioé sia definita una applicazione $* : x \longmapsto x^*$ continua di A in A tale che:

(a) $(x^*)^* = x$, $(x+y)^* = x^*+y^*$, $(\lambda x)^* = \bar{\lambda}\, x^*$,

$(xy)^* = y^* x^*$, per ogni $x,y \in A$ e $\lambda \in \mathbb{C}$;

(b) ogni elemento della forma $e + x^*x$ è invertibile.

Siccome A ammette l'elemento identico, allora x è invertibile se, e solo se, x^* invertibile e $(x^{-1})^* = (x^*)^{-1}$.

Poiché $(x-\lambda e)^* = x^*-\bar{\lambda}e$ per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$, si deduce che $Spx^* = \overline{Spx}$

Questo fatto implica che l'involuzione $*$ è hermitiana, cioé ogni elemento hermitiano di A($h\in A$, h hermitiano $\overset{def}{\Longleftrightarrow} h^*=h$) ha uno spettro reale.

Sia $E = H_A$ il sottospazio reale di tutti gli elementi hermitiani di A. H_A è un sottospazio chiuso di A in quanto l'involuzione $*$ è continua.

Un elemento $h \in H_A$ è detto positivo, " $h \geq 0$" se $Sph \subset R_+$.

Sia Ω_o il cono degli elenti hermitiani positivi di H_A. Essendo A simmetrica se $h \geq 0$, $k \geq 0$ allora (cfr. [6] lemma 4.7.10 pag. 234) $h + k \geq 0$. Quindi il cono Ω_o è convesso.

Sia Ω la parte interna di Ω_o per la topologia in H_A.

Facciamo vedere che Ω è il cono convesso aperto degli elementi hermitiani strettamente positivi. Intanto se $h \in \Omega_o$ con $0 \in Sph$ allora $h \notin \Omega$; infatti siccome $y_n = h - \frac{1}{n} e \notin \Omega_o$ per ogni intero $n > 0$, segue che non esiste un intorno di $h = \lim y_n$ contenuto in Ω_o . Sia ora $h \in \Omega_o$ con $0 \notin Sph$, siccome l'applicazione $x \longmapsto Spx$ (cfr. [6] pag. 35-36) è semi-continua superiormente, allora esiste un intorno $I(h)$ di h in H_A tale che per ogni $k \in I(h)$: $Spk > 0$, cioé h è interno a Ω_o .

Quindi $\Omega = \{h \in H_A : Sph \subset \mathbb{R}_+^*\}$.

Dato $x \in \Omega$, sia $x^{\frac{1}{2}}$ la sua radice quadrata positiva.

Lo $Sp\, x^{\frac{1}{2}}$ è l'immagine di $Sp\, x$ per l'applicazione $t \longmapsto \sqrt{t}$.

Quindi $x^{\frac{1}{2}} \in \Omega$, e $x^{\frac{1}{2}}$ è invertibile.

Indichiamo l'inverso di $x^{\frac{1}{2}}$ con $x^{-\frac{1}{2}}$: $x^{-\frac{1}{2}} = (x^{\frac{1}{2}})^{-1}$.

L'automorfismo lineare $Tx : z \longmapsto x^{-\frac{1}{2}} z x^{-\frac{1}{2}}$ $(x \in \Omega)$ di A in A, applica H_A in sé. Per $y \in \Omega$, essendo $Tx(y) = x^{-\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}} = (y^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}})^*(y^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}})$ segue (cfr. 6 pag. 233) che $Tx(y) \geq 0$.

Inoltre essendo y invertibile, anche $Tx(y)$ è invertibile, per cui $Tx(y) \in \Omega$. Quindi Tx applica Ω in sé, ed essendo $Tx(e) = e$ possiamo affermare che il gruppo $\{Tx : x \in \Omega\}$ opera transitivamente su Ω. Perciò Ω è omogeneo-affine.

Si dimostra che la distanza "tipo Carathéodory" C_Ω è data dalla

$$C_\Omega(x,y) = \max\{\log \rho(x^{-1}y) , \log(xy^{-1})\} \qquad (x,y \in \Omega) , \qquad (2.2.1)$$

dove ρ è il raggio spettrale in A. La dimostrazione richiede considerazioni delicate sugli stati di A. Per essa rinviamo a [15].

TEOREMA 2.2.1 *Il cono* $\Omega = \{h \in H_A : Sph \subset R_+^*\}$ *è regolare se e solo se* A *non contiene elementi hermitiani quasi-nilpotenti diversi da quello banale.*

Dimostrazione. Dalla (2.2.1) si vede che C_Ω è invariante rispetto all'applicazione $x \longmapsto x^{-1}$ di Ω su di sé. D'altronde sempre dalla (2.2.1)

$C_\Omega(e,h) = 0$ se, e solo se, $Sph = \{1\}$. Ma se $Sph = \{1\}$, allora $h = \exp x$ con x elemento hermitiano, quasi-nilpotente (i.e. $\rho(x) = 0$). Pertanto il teorema 2.2.1 segue dalla proposizione 2.2.1.

C.V.D.

Supponiamo ora che A sia un'algebra C^* con identità. L'algebra A non contiene elementi hermitiani quasi-nilpotenti diversi da quello banale, pertanto dal teorema 2.2.1 segue che Ω è regolare. Inoltre per ogni elemento hermitiano h : $\rho(h) = ||h||$.

Per $x,y \in \Omega$, $x^{-\frac{1}{2}} y x^{-\frac{1}{2}}$ e $y^{-\frac{1}{2}} x y^{-\frac{1}{2}}$ sono hermitiani, perciò

$$||x^{-\frac{1}{2}} y x^{-\frac{1}{2}}|| = \rho(x^{-\frac{1}{2}} y x^{-\frac{1}{2}}) = \rho(x^{-1} y)$$

$$||y^{-\frac{1}{2}} x y^{-\frac{1}{2}}|| = \rho(y^{-\frac{1}{2}} x y^{-\frac{1}{2}}) = \rho(y^{-1} x) ,$$

e dalla (2.2.1)

$$C_\Omega(x,y) = \max\{\log||x^{-\frac{1}{2}} y x^{-\frac{1}{2}}||, \log||y^{-\frac{1}{2}} x y^{-\frac{1}{2}}||\} \qquad (2.2.2)$$

Ne segue (cfr. [15] pag.686-687) che la $|| \; ||$-topologia e la C_Ω-topologia coincidono in Ω. In definitiva vale la

PROPOSIZIONE 2.2.3. *Se* A *è una algebra* C^* *con identità, allora* C_Ω *è definita dalla* (2.2.2), Ω *è regolare, e la topologia definita da* C_Ω *è equivalente alla topologia relativa. Quindi* Ω *ha sezioni piane di apertura uniformemente limitate.*

Sia ε uno spazio di Hilbert complesso, $\mathcal{L}(\varepsilon)$ l'algebra degli operatori lineari continui di ε in sé.

L'algebra $\mathcal{L}(\varepsilon)$ è un'algebra C^*. Anzi, ogni algebra C^* è isomorfa ad una sottoalgebra autoaggiunta di $\mathcal{L}(\varepsilon)$ chiusa per la topologia definita dalla norma.

Una sottoalgebra autoaggiunta di $\mathcal{L}(\varepsilon)$, contenente l'elemento identico e chiusa per la topologia debole degli operatori, è un'algebra di Von

Neumann.

Una definizione equivalente di algebra di Von Neumann è la seguente. Sia A un'algebra C^*. Se lo spazio di Banach A è duale di uno spazio di Banach, A è un'algebra di Von Neumann.

Sia quindi A un'algebra di Von Neumann di operatori lineari limitati di ε in sé. Indichiamo con (,) il prodotto scalare di ε.

Per ogni $h \in H_A$ è (cfr. [15]) :

$$\rho(h) = ||h|| = ||h^{\frac{1}{2}}||^2 = \mathrm{Sup}\{||h^{\frac{1}{2}}\xi||^2 : \xi \in \varepsilon, (\xi,\xi) = 1\}$$

$$= \mathrm{Sup}\{(h\xi,\xi) : \xi \in \varepsilon , (\xi,\xi) = 1\}$$

$$C_\Omega(e,h) = \mathrm{Sup}\{(\log(h\xi,\xi)) : \xi \in \varepsilon, (\xi,\xi) = 1\}$$

$$C_\Omega(x,y) = \mathrm{Sup}\{\sigma((x\xi,\xi),(y\xi,\xi)) : \xi \in \varepsilon , (\xi,\xi) = 1\} \qquad (2.2.3)$$

Utilizzando queste formule si provano i teoremi:

Teorema 2.2.2 (cfr. [15])

Se A è un'algebra di Von-Neumann la metrica C_Ω, definita dalla (2.2.3), è completa su Ω.

Teorema 2.2.3 (cfr. [15])

Sia A un'algebra di Von-Neumann. Siano V_1 e V_2 due sottoinsieme limitati di Ω. L'insieme delle applicazioni lineari limitate T di H_A in sé tale che $T(\Omega) \subset \Omega$ e $T(V_1) \cap V_2 \neq \emptyset$, è uniformemente limitato in norma.