Perciò abbiamo

$$\frac{p(v)}{R'} \leq \gamma_D(x,v) \leq \frac{p(v)}{R} \quad \text{per ogni} \quad v \in E,$$

cioé $\gamma_D(x,\cdot)$ è una seminorma equivalente a p.

C.V.D.

§ 1.7. METRICHE INTERNE

Ricordiamo la nozione di metrica interna, rinviando per maggiori dettagli a W. Rinow [7].

Sia X uno spazio metrico connesso con una pseudo-distanza d. Data una curva $\sigma : [a,b] \longrightarrow X$, la sua lunghezza è per definizione

$$L(\sigma) = \sup \Sigma_j d(\sigma(t_{j-1}),\sigma(t_j))$$

dove l'estremo superiore è preso rispetto a tutte le suddivisioni di $[a,b]$.

La curva σ si dice rettificabile se $L(\sigma) < \infty$

Lo spazio X si dice finitamente connesso per archi se ogni coppia di punti può essere congiunto da una curva rettificabile.

Definiamo su X la pseudo-distanza d' indotta da d, mediante la

$$d'(x,y) = \inf L(\sigma)$$

dove l'estremo inferiore è preso rispetto a tutte le curve rettificabili che congiungono x e y.

Per la disuguaglianza triangolare è

$$d(x,y) \leq d'(x,y) .$$

Se

$$d(x,y) = d'(x,y) \qquad \text{per ogni} \quad x,y \in X,$$

d si dice pseudo-distanza interna.

LEMMA 1.7.1. *Sia* D *un dominio di* E *(oppure una varietà complessa connessa). La funzione* $\gamma_D : D \times E \to R_+$ $(\gamma_D : D \times T(D) \to R_+)$ *è localmente Lipschitziana.*

Dimostrazione. Omessa.

LEMMA 1.7.2. *Per un* D *come nel lemma precedente, la funzione* $K_D : D \times E \to R_+$ $(K : D \times T(D) \to R_+)$ *è semicontinua superiormente.*

Dimostrazione. Omessa.

Per la dimostrazione del lemma 1.7.1 e del lemma 1.7.2 si rinvia il lettore a [14] .

Preso D come nei due lemmi precedenti, sia ℓ una curva differenziabile a tratti in D, e sia $\sigma : [a,b] \longrightarrow D$ una rappresentazione parametrica differenziabile a tratti di ℓ .

Per il lemma 1.7.1 possiamo definire la "lunghezza" di ℓ rispetto a γ_D con

$$L_\gamma(\ell) = \int_a^b \gamma_D(\sigma(t);\sigma'(t))\, dt \ .$$

Siccome $\gamma_D(x,av) = |a|\gamma_D(x,v)$, $L_\gamma(\ell)$ non dipende dalla rappresentazione parametrica differenziabile a tratti σ.

Il dominio D, essendo connesso e localmente connesso per archi, è connesso per archi. Quindi comunque prendiamo x e y in D, questi si possono congiungere con una curva differenziabile in D.

Per $x,y \in D$, definiamo

$$\tilde{C}_D(x,y) = \inf L_\gamma(\ell)$$

dove l'estremo inferiore è preso rispetto a tutte le curve differenziabili che congiungono x e y in D. Dalla continuità di γ_D(cfr. lemma 1.7.1) segue che ciò è lo stesso che fare l'estremo inferiore rispetto a tutte le curve differenziabili a tratti che congiungono x e y. Quindi $\tilde{C}_D$ è una pseudo-distanza.

Per $\xi_1,\xi_2 \in \Delta$, applicando la (1.6.3), abbiamo

$$\tilde{C}_\Delta(\xi_1,\xi_2) = \inf \int_a^b \gamma_\Delta(\sigma(t),\sigma'(t))dt = \inf \int_a^b < \sigma'(t) >_{\sigma(t)} dt = \omega(\xi_1,\xi_2),$$

ossia

$$\tilde{C}_\Delta(\xi_1,\xi_2) = \omega(\xi_1,\xi_2) = C_\Delta(\xi_1,\xi_2) \ .$$

Quindi per ogni $f \in Hol(D,\Delta)$ e per ogni curva differenziabile a tratti ℓ congiungente x e y in D, dalla proposizione 1.6.1, abbiamo

$$\omega(f(x),f(y)) = \tilde{C}_\Delta(f(x),f(y)) \leq \int_a^b \gamma_\Delta(f(\sigma(t)),f'(\sigma(t))\cdot\sigma'(t))dt \leq$$

$$\leq \int_a^b \gamma_D(\sigma(t),\sigma'(t))dt.$$ Prendendo l'estremo inferiore rispetto a tutte le curve differenziabili a tratti congiungenti x e y in D, si ha

$$\omega(f(x),f(y)) \leq \tilde{C}_D(x,y) \quad .$$

Prendendo ora l'estremo superiore rispetto a tutte le $f \in Hol(D,\Delta)$ si ha

$$C_D(x,y) \leq \tilde{C}_D(x,y) \quad .$$

Abbiamo visto che due punti x e y in D si possono congiungere con una curva differenziabile ℓ, espressa da una funzione differenziabile $\sigma : [a,b] \to D$. Per il lemma 1.7.2 possiamo definire la lunghezza di ℓ rispetto a $\mathcal{K}_D$ con

$$L_{\mathcal{K}}(\ell) = \int_a^b \mathcal{K}_D(\sigma(t),\sigma'(t))dt \ .$$

Siccome $\mathcal{K}_D(x,av) = |a|\mathcal{K}_D(x,v)$, $L_{\mathcal{K}}(\ell)$ è indipendente dalla rappresentazione parametrica differenziabile σ.

Per $x,y \in D$ definiamo

$$\tilde{d}_D(x,y) = \inf L_{\mathcal{K}}(\ell)$$

dove l'estremo inferiore è preso rispetto a tutte le curve differenziabili che congiungono x e y in D. Dal lemma 1.6.4 segue che ciò è lo stesso che fare l'estremo inferiore rispetto a tutte le curve differenziabili a tratti congiungenti x e y in D. Quindi $\tilde{d}_D(x,y)$ è una pseudo-distanza.

Si dimostra (cfr. Teorema 7.4 di [14]) che

$$\tilde{d}_D(x,y) = d_D(x,y) \qquad \text{per ogni} \quad x,y \in D,$$

cioé la pseudo-distanza di Kobayashi è la forma integrata di $\mathcal{K}_D$.

Tale risultato mostra che d_D è una distanza interna se D è iperbolico.