Questo risultato dovuto a J.P.Vegué (cfr. [16] pag. 279) vale anche per domini limitati in spazi vettoriali complessi di Hausdorff, localmente convessi, localmente limitati e completi per successioni (cfr. [14] prop. 2.4.) .

§ 1.5. APPLICAZIONI.

Le distanze di Carathéadory e di Kobayashi hanno suggestive applicazioni all'analisi complessa ed all'analisi funzionale. Ne indichiamo alcune, rinviando per maggiori dettagli, nonché per altre applicazioni, a [13], [14], [4] .

I) TEOREMA DI PICARD. *Ogni applicazione olomorfa* $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \setminus \{a,b\}$ *con* $a,b \in \mathbb{C}$, $a \neq b$, *è una applicazione costante.*

Dimostrazione. Sia $D = \mathbb{C} \setminus \{a,b\}$, e sia $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{C},D)$.
Dal lemma 1.4.1 segue che, per $x,y \in \mathbb{C}$,

$d_D(f(x),f(y)) \leq d_{\mathbb{C}}(x,y) = 0$. Poiché D è iperbolico (esempio 1.4.8)

risulta $f(x) = f(y)$ per ogni $x,y \in \mathbb{C}$ e quindi f è costante.

Questo è il cosiddetto "piccolo" Teorema di Picard.

GRANDE TEOREMA DI PICARD. *Se* f *è una applicazione olomorfa di* $\{\xi \in \mathbb{C} : 0 < |\xi| < R\} \longrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) - \{3 \text{ punti}\}$, *allora* f *può essere estesa a una applicazione olomorfa di* $\{\xi \in \mathbb{C} : |\xi| < R\} \longrightarrow P^1(\mathbb{C})$.

Questo teorema può essere dimostrato ancora mediante le distanze di Kobayashi. Si veda in proposito la monografia [4] .

Tale teorema è un caso particolare del seguente problema generale:

Sia X *una varietà complessa e* Y *una sottovarietà iperbolica relativamente compatta. Data* $f \in Hol(\{\xi \in \mathbb{C} : 0 < |\xi| < R\}, Y)$, *è possibile estendere* f *in un elemento di* $Hol(\{\xi \in \mathbb{C} : |\xi| < R\}, X)$?

La risposta è affermativa solo in casi particolari. Si veda in proposito la monografia [4] .

II) AUTOMORFISMI DEL DISCO UNITA' IN CERTI SPAZI DI BANACH.

Sia (M,Ξ,μ) uno spazio di misura. Cioè M sia un insieme, Ξ una σ-algebra di sottoinsiemi di M, e μ una misura positiva su Ξ.

Sia $E = L^1(M,\Xi,\mu)$ e B la palla unitaria aperta

$$B = \{x \in E : ||x|| = \int_M |x| d\mu < 1\} \quad .$$

Se $M = \{a\}$, E può essere identificato col piano complesso.
Se $M = \{a,b\}$ con $\mu(a) = \mu(b) = 1$, allora E può essere identificato con $\mathbb{C}^2$ e la palla $B = \{(\xi_1,\xi_2) \in \mathbb{C}^2 : |\xi_1| + |\xi_2| < 1\}$.

TEOREMA 1.5.1. *Se* $\dim_{\mathbb{C}} E > 1$, *ogni automorfismo olomorfo* f *di* B *lascia fissa l'origine (e quindi, per il teorema di H. Cartan,* f *è la restrizione a* B *di una isometria lineare di* E *su di sé).*

Il teorema 1.5.1. trovasi in [13] .

Per $M = \{a,b\}$ e quindi per $E = \mathbb{C}^2$ il teorema 1.5.1 è stato provato da Kritikos nel 1927.

Il risultato del teorema 1.5.1 è conseguenza di alcune proprietà per le distanze di Kobayashi e di Carathéadory in domini di spazi di Banach complessi. Nella dimostrazione si utilizza la nozione di <u>curva geodetica complessa in B</u>: sia $g : \Delta \to B$ una applicazione olomorfa tale che $g(0) = x_0$, allora

$$\omega(0.\xi) \geq C_B(x_0, g(\xi)) \qquad \text{per ogni} \quad \xi \in \Delta ;$$

se vale l'uguale per ogni $\xi \in \Delta$, $\gamma = g(\Delta)$ si dice curva geodetica complessa per x_0 .

Per ogni $x \in B$, $x \neq 0$, l'immagine di Δ per l'applicazione lineare $\xi \longmapsto \dfrac{\xi}{||x||} x$ è l'unica curva geodetica complessa per 0 contenente x.

Il teorema 1.5.1 vale anche per $1 \leq p < 2$ e $2 < p < \infty$.

Per $p = 2$ il teorema non vale in quanto il disco unità aperto di ogni spazio di Hilbert è omogeneo.

§ 1.6. METRICHE DIFFERENZIALI DI KOBAYASHI E DI CARATHEODORY.

Con le stesse notazioni del §1.4 sia D un dominio di E.

Le considerazioni che seguiranno si estendono al caso in cui D è una varietà complessa. E è allora lo spazio tangente a D in x.

LEMMA 1.6.1. *Dato* $x \in D$, $v \in E$, $\xi_0 \in \Delta$, *esistono* $h \in Hol(\Delta, D)$ *e* $\tau \in \mathbb{C}$ *tale che* $h(\xi_0) = x$ *e* $d\,h(\xi_0)\tau = v$.