Si verifica che $SL(2,\mathbb{R})$ è il rivestimento a due fogli del gruppo $SO(2,1)$.

§ 1.4. PSEUDO-DISTANZE DI KOBAYASHI E DI CARATHÉODORY .

Indicheremo con D indifferentemente o una varietà complessa connessa, o una spazio analitico complesso, o un dominio (i.e. un aperto connesso) di $\mathbb{C}^n$, o infine un dominio di uno spazio vettoriale topologico complesso localmente convesso e di Hausdorff E. Se D è un dominio di E ed E_1 è un altro spazio dello stesso tipo di E, una applicazione olomorfa $F : D \longrightarrow E_1$ e per definizione una applicazione continua di D in E_1 tale che, per ogni $(x,y) \in D\times(E \setminus\{0\})$ e per ogni forma lineare continua λ_1 su E_1, la funzione a valori complessi $\xi \longrightarrow \lambda_1 \circ F(x+\xi y)$ è olomorfa sull'aperto $\{\xi\in \mathbb{C} : x+\xi y \in D\}$ di $\mathbb{C}$.

Se D_1 è un dominio di E_1, con $Hol(D,D_1)$ denoteremo l'insieme di tutte le applicazioni olomorfe $F : D \longrightarrow E_1$ tale che $F(D) \subset D_1$.

Per fissare le idee, nel seguito ci riferiremo prevalentemente al caso in cui D è un dominio, lasciando al lettore di adattare le nostre considerazioni agli altri casi sopra indicati.

La pseudo-distanza di Carathéodory in D, si indica con C_D,ed è definita nel modo seguente:

$C_D(x,y) = \mathrm{Sup}\{\omega(f(x),f(y)) : f \in \mathrm{Hol}\,(D,\Delta)\}$ per ogni $x,y \in D$.

Una volta provato che $C_D(x,y) < \infty$, è chiaro che C_D è una pseudo-distanza cioé verifica

$$0 \leq C_D(x,y) = C_D(y,x) \quad \text{e} \quad C_D(x,y) \leq C_D(x,z) + C_D(z,y) .$$

La pseudo-distanza di Carathéodory fu introdotta da Carathéodory nel 1927 per domini di $\mathbb{C}^2$. Per provare che $C_D(x,y) < \infty$ egli fece ricorso alla teoria delle famiglie normali.

Difatti può scriversi $\quad C_D(x,y) = \lim_n \omega(f_n(x),f_n(y))$ con $f_n \in \mathrm{Hol}(D,\Delta)$. Dalla teoria delle famiglie normali segue che esiste una sottosuccessione (f_{nj}) che converge unif$\underline{\text{te}}$ sui compatti di $D \subset \mathbb{C}^2$.

Proveremo che $C_D(x,y) < \infty$, costruendo in D la pseudo-distanza di Kobayashi d_D e provando che $C_D \leq d_D$.

<u>La speudo-distanza di Kobayashi</u> $d_D(x,y)$ tra due punti x e y in D è definita come segue.

Una catena analitica in D, congiungente due punti x e y di D, consiste di un numero finito ν di funzioni $f_j \in \mathrm{Hol}(\Delta,D)$ e di 2ν punti $\xi_1', \xi_1'', \ldots, \xi_\nu', \xi_\nu'' \in \Delta$, tale che

$$f_1(\xi_1') = x \;,\; f_j(\xi_j'') = f_{j+1}(\xi'_{j+1}) \; (j=1,2,\ldots,\nu-1), f_\nu(\xi_\nu'') = y \;.$$

La somma $\sum_{j=1}^{\nu} \omega(\xi_j', \xi_j'')$ è detta lunghezza della catena analitica.

Essendo D connesso, l'esistenza di catene analitiche congiungenti x e y in D è assicurata.

La pseudo-distanza di Kobayashi $d_D(x,y)$ è, per definizione,

$$d_D(x,y) = \inf \sum_{j=1}^{\nu} \omega(\xi_j', \xi_j'')$$

dove l'estremo inferiore è preso su tutte le catene analitiche che congiungono x e y in D. Dalla definizione segue che d_D è una pseudo-distanza.

ESEMPIO 1.4.1.

$$d_\Delta(x,y) = \omega(x,y) \qquad (x,y \in \Delta) .$$

Dimostrazione. Prendendo $\nu = 1$, $f_1 : \xi \longrightarrow \xi$, si ottiene $d_\Delta(x,y) \leq \omega(x,y)$. D'altra parte, per una catena analitica qualsiasi facendo ricorso alla (1.2.3) ed alla disuguaglianza triangolare, si ha

$$\sum_{j=1}^{\nu} \omega(\xi_j', \xi_j'') \geq \sum_{j=1}^{\nu} \omega(f_j(\xi_j'), f_j(\xi_j'')) \geq \omega(f_1(\xi_1'), f_\nu(\xi_\nu'')) =$$

$= \omega(x,y)$. Quindi $d_\Delta(x,y) = \omega(x,y)$. C.V.D.

LEMMA 1.4.1. *Le applicazioni olomorfe contraggono la pseudo-distanza di Kobayashi, cioè per ogni* $F \in \mathrm{Hol}(D,D_1)$ *risulta*

$$d_{D_1}(F(x),F(y)) \leq d_D(x,y) \qquad \textit{per ogni} \quad x,y \in D.$$

Dimostrazione. Segue banalmente dalla definizione di pseudo-distanza di Kobayashi, tenendo conto che ogni catena analitica in D che congiunge x e y, definisce una catena analitica in D_1 che congiunge $F(x)$ e $F(y)$.

In particolare si ha che:

a) <u>ogni diffeomorfismo biolomorfo di D in D_1, è una isometria per entrambe le pseudo-distanze d_D e d_{D_1}</u> .

b) <u>Ogni $F \in Aut(D)$ è una isometria per d_D</u> .

c) <u>Se $D \hookrightarrow D_1$, $d_{D_1}(x,y) \leq d_D(x,y)$ per ogni $x,y \in D$.</u>

COROLLARIO 1.4.1.

$$C_D(x,y) \leq d_D(x,y) \qquad \textit{per ogni} \quad x,y \in D.$$

Dimostrazione. Sia $f \in Hol(D,\Delta)$. Dal lemma 1.4.1 segue che

$$d_\Delta(f(x),f(y)) \leq d_D(x,y) \qquad \text{per ogni} \quad x,y \in D.$$

D'altronde dall'esempio 1.4.1

$d_\Delta(f(x),f(y)) = \omega(f(x),f(y))$, perciò

$$\omega(f(x),f(y) \leq d_D(x,y) \qquad \text{per ogni} \quad x,y \in D.$$

Ciò implica che $\operatorname{Sup}\{\omega(f(x),f(y)) : f \in Hol(D,\Delta)\} \leq d_D(x,y)$,

ossia

$$C_D(x,y) \leq d_D(x,y) \qquad \text{per ogni} \quad x,y \in D.$$

Per conseguenza risulta

$$C_D(x,y) < \infty \qquad \text{per ogni} \quad x,y \in D.$$

C.V.D.

La pseudo distanza di kobayashi è estremale, nel senso precisato dal seguente

LEMMA 1.4.2. *Se d' è una pseudo distanza su D tale che $d'(f(\xi_1),f(\xi_2)) \leq \omega(\xi_1,\xi_2)$ per ogni $f \in Hol(\Delta,D)$ e per ogni $\xi_1,\xi_2 \in \Delta$, allora $d' \leq d_D$.*

Dimostrazione. Sia $(f_j)_{j=1,\dots\nu} \in Hol(\Delta,D)$ una qualsiasi catena analitica congiungente due punti x e y di D.

Applicando la disuguaglianza triangolare e l'ipotesi del lemma, si ha

$$d'(x,y) \leq \sum_{j=1}^{\nu} d'(f_j(\xi_j'),f_j(\xi_j'')) \leq \sum_{j=1}^{\nu} \omega(\xi_j',\xi_j'').$$

Pertanto $d'(x,y) \leq d_D(x,y)$.

C.V.D.

ESEMPIO 1.4.1'.

$$C_\Delta(x,y) = \omega(x,y) = d_\Delta(x,y) \qquad (x,y \in \Delta) .$$

Dimostrazione. Prendendo $f : \xi \longrightarrow \xi$ risulta $\omega(x,y) \leq C_\Delta(x,y)$.

D'altronde $C_\Delta(x,y) \leq d_\Delta(x,y) = \omega(x,y)$.

LEMMA 1.4.3. *Le applicazioni olomorfe contraggono la pseudo distanza di Carathéodory, cioè per ogni $F \in Hol(D,D_1)$ risulta*

$$C_{D_1}(F(x),F(y)) \leq C_D(x,y) \qquad \text{per ogni } x,y \in D.$$

Dimostrazione. Segue banalmente dalla definizione di pseudo distanza di Carathéodory, tenendo conto che ogni $f \in Hol(D_1,\Delta)$ definisce una $f' = f \circ F \in Hol(D,\Delta)$.

In particolare risulta:

a) Ogni diffeomorfismo biolomorfo di D in D_1, è una isometria per entrambe le pseudo distanze C_{D_1} e C_D.

b) Ogni $F \in Aut(D)$ è una isometria per C_D.

c) Se $D \hookrightarrow D_1$, $C_{D_1}(x,y) \leq C_D(x,y)$ per ogni $x,y \in D$.

Anche la pseudo distanza di Carathéodory è estramale nel senso precisato dal seguente

LEMMA 1.4.4. *Se* C' *è una pseudo-distanza su* D *tale che* $C'(x,y) \geq \omega(f(x),f(y))$ *per ogni* $f \in Hol(D,\Delta)$ *e per ogni* $x,y \in D$, *allora* $C' \geq C_D$.

Dimostrazione. Segue banalmente dalla definizione di C_D.

ESEMPIO 1.4.2. Sia p una seminorma continua su E, e sia $B_p = \{x \in E : p(x) < 1\}$. Per ogni $x \in B_p$ risulta

$$C_{B_p}(0,x) = d_{B_p}(0,x) = \omega(0,p(x)) .$$

Dimostrazione.

1° caso. Sia $x \in B_p$ con $p(x) > 0$.

La funzione olomorfa $\xi \longmapsto \dfrac{\xi x}{p(x)}$ applica Δ in B_p, $0 \longmapsto 0$ e $p(x) \longmapsto x$. Perciò

$$C_{B_p}(0,x) \leq d_{B_p}(0,x) \leq \omega(0,p(x)) .$$

Resta da provare che $\omega(0,p(x)) \leq C_{B_p}(0,x)$. Per il teorema di Hahn-Banach, esiste una forma lineare continua λ su E tale che $\lambda(x) = p(x)$ e $|\lambda(y)| \leq p(y)$ per ogni $y \in E$. Perciò λ applica B_p in Δ, ossia $\lambda \in \mathrm{Hol}(B_p,\Delta)$. Ne segue che $\omega(0,p(x)) = \omega(\lambda(0),\lambda(x)) \leq C_{B_p}(0,x)$.

2° caso. Sia $x \in B_p \setminus \{0\}$ con $p(x) = 0$.

Per ogni $t > 1$, consideriamo la funzione olomorfa

$$f_t : \xi \longmapsto t\xi \cdot x \quad .$$

Questa funzione applica Δ in B_p, inoltre $f_t(0) = 0$ e $f_t(\frac{1}{t}) = x$. Quindi

$$C_{B_p}(0,x) \leq d_{B_p}(0,x) = d_{B_p}(f_t(0), f_t(\tfrac{1}{t})) \leq \omega(0,\tfrac{1}{t}) =$$

$$= \frac{1}{2} \log \frac{1+\frac{1}{t}}{1-\frac{1}{t}} \longrightarrow 0 \text{ per } t \longrightarrow +\infty \text{ . Pertanto}$$

$$C_{B_p}(0,x) = d_{B_p}(0,x) = 0 = \omega(0,p(x)) \quad .$$

C.V.D.

Più in generale abbiamo

<u>ESEMPIO 1.4.2'</u>. Sia $r > 0$ e sia $B_p(x_o,r) = \{x \in E : p(x-x_o) < r\}$.

Per ogni $x \in B_p(x_o,r)$ risulta

$$C_{B_p(x_o,r)}(x_o,x) = d_{B_p(x_o,r)}(x_o,x) = \omega(0,\frac{p(x-x_0)}{r})$$

<u>ESEMPIO 1.4.3.</u> Sia $D = \Delta \times \Delta$. Per $x = (\xi_1,\xi_2)$ e $x'=(\xi_1',\xi_2')$ punti di D, si ha

$$C_D(x,x') = d_D(x,x') = \max\{\omega(\xi_1,\xi_1'),\omega(\xi_2,\xi_2')\} .$$

Dimostrazione. Consideriamo il caso in cui $\xi_1 = \xi_2 = 0$. Sia $p : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \longrightarrow R$ la norma definita dalla $(\delta_1,\delta_2) \longmapsto \max\{|\delta_1|, |\delta_2|\}$. Chiaramente $D = \Delta \times \Delta = B_p = \{y \in \mathbb{C}^2 : p(y) < 1\}$, perciò applicando l'esempio 1.4.2 abbiamo

$$C_D(0,x') = d_D(0,x') = \omega(0,p(x')) = \omega(0,\max\{|\xi_1'|,|\xi_2'|\}) =$$

$= \max\{\omega(0,\xi_1'), \omega(0,\xi_2')\}$. La conclusione, per il caso in cui $x = (\xi_1,\xi_2) \neq (0,0)$, segue dal fatto che il gruppo $\mathrm{Aut}(\Delta) \times \mathrm{Aut}(\Delta)$ opera transitivamente su D lasciando invarianti C_D e d_D.

C.V.D.

PROPOSIZIONE 1.4.1. *Le funzioni* $C_{\mathcal{D}} : \mathcal{D} \times \mathcal{D} \longrightarrow R_+$ *e* $d_{\mathcal{D}} : \mathcal{D} \times \mathcal{D} \longrightarrow R_+$ *sono continue.*

Dimostrazione. Sia p una semi-norma continua su E.

Dato $x_o \in D$, essendo D aperto, esiste $r > 0$ tale che

$B_p(x_o,r) \subset D$.

Dal Corollario 1.4.1 e dal Lemma 1.4.1 segue che

$$C_D(x_o,x) \leq d_D(x_o,x) \leq d_{B_p(x_o,r)}(x_o,x) \quad ,$$

d'altronde dall'esempio 1.4.2' segue che

$d_{B_p(x_o,r)}(x_o,x) = \omega(0, \frac{p(x_o-x)}{r})$. Pertanto le funzioni

$x \longmapsto C_D(x_o,x)$ e $x \longmapsto d_D(x_o,x)$ sono continue.

Inoltre per x_o,y_o,x,y in D si ha:

$$|C_D(x_o,y_o) - C_D(x,y)| \leq |C_D(x_o,x) + C_D(x,y_o) - C_D(x,y)| \leq$$

$$\leq |C_D(x_o,x) + C_D(x,y) + C_D(y,y_o) - C_D(x,y)| = C_D(x_o,x) + C_D(y_o,y) \ ,$$

analogamente

$|d_D(x_o,y_o) - d_D(x,y)| \leq d_D(x_o,x) + d_D(y_o,y)$. Quindi possiamo in definitiva concludere affermando che le funzioni C_D e d_D sono continue su $D \times D$.

C.V.D.

LEMMA 1.4.5. *Se D è un dominio limitato di E, allora* C_D

e d_D *definiscono su* D *la topologia relativa.*

Dimostrazione. Sia $x_o \in D$ e, per $s > 0$, sia

$$S(x_o,s) = \{x \in D : d_D(x_o,x) < s\} .$$

Per provare il lemma 1.4.5 riferito a d_D, è sufficiente provare che per ogni intorno U di x_o in D esiste un $s > 0$ tale che $S(x_o, s) \subset U$. Sia p una semi-norma continua su E e sia $r > 0$ tale che $B_p(x_o,r) \subset U$. Essendo D limitato, esiste $R > 0$ tale che $D \subset B_p(x_o,R)$. Dal lemma 1.4.1. e dall'esempio 1.4.2' segue che:

$$d_D(x_o,x) \geq d_{B_p(x_o,R)}(x_o,x) = \omega(0,\frac{p(x-x_o)}{R}) =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2n+1} \left(\frac{p(x-x_o)}{R}\right)^{2n+1} \geq \frac{p(x-x_o)}{R} .$$

Per ogni $x \in S(x_o,s)$, con $s = \frac{r}{R}$, risulta quindi

$p(x-x_o) \leq R\, d_D(x_o,x) < R\cdot \frac{r}{R} = r$ cioé $S(x_o,s) \subset B_p(x_o,r)$

con $B_p(x_o,r) \subset U$. In modo analogo si opera per C_D.

C.V.D.

COROLLARIO 1.4.2. *Sotto le stesse ipotesi del lemma 1.4.5., entrambe le pseudo distanze* C_D *e* d_D *sono distanze.*

<u>DEFINIZIONE 1.4.1.</u> <u>Se d_D è una distanza, D si dice iperbolico.</u>

PROPOSIZIONE 1.4.2. *Se D è una varietà complessa o uno spazio analitico, iperbolico, di dimensione finita, allora la topologia definita da d_D è equivalente alla topologia relativa di D.*

Questo risultato è dovuto a Barth (per la dimostrazione si può consultare [1]).

ESEMPIO 1.4.4.

$$d_E = C_E = 0 \quad .$$

Dimostrazione. Considerando la semi norma $p = 0$, si ha $B_p \equiv E$ e quindi dall'esempio 1.4.2 segue che $d_E = C_E = 0$.

ESEMPIO 1.4.5. Se M è varietà complessa sulla quale opera transitivamente un gruppo di Lie complesso G, allora $d_M = 0$ (e quindi $C_M = 0$) .

Dimostrazione. Per ogni $p \in M$, consideriamo U intorno di p tale ogni $q \in U$ stà nell'orbita passante per p di un sottogruppo complesso ad un parametro di G. Segue che per ogni $q \in U$, esiste una $F \in Hol(\mathbb{C},M)$ con $p,q \in F(\mathbb{C})$. Quindi

$$d_M(p,q) = d_M\,(F(z_1),F(z_2)) \leq d_{\mathbb{C}}(z_1,z_2) = 0 \text{ , cioè } d_M(p,q) = 0 \ .$$

Siccome ogni coppia di punti $p,q \in M$ possono essere congiunti con una catena di intorni del tipo U, applicando la disuguaglianza triangolare segue che $d_M(p,q) = 0$ per tutti i $p,q \in M$.

C.V.D.

OSSERVAZIONE 4.

Da un classico teorema di Bochner e Montgomery segue pertanto che $d_M = 0$ per ogni varietà complessa compatta omogenea. Ad esempio $d_M = 0$ se M è uno spazio proiettivo complesso o un toro complesso.

Per trovare esempi in cui $d_D \neq C_D$ consideriamo il caso in cui D è una varietà complessa (di dimensione finita), ed esaminiamo i rivestimenti (per le nozioni concernenti i rivestimenti cfr., ad esempio, [12]).

Sia $\pi : \tilde{D} \longrightarrow D$ un rivestimento di D.

LEMMA 1.4.6. *Siano* $x,y \in D$, *scegliamo un* $\tilde{x} \in \tilde{D}$ *tale che* $\pi(\tilde{x}) = x$. *Risulta*

$$d_D(x,y) = \inf\{d_{\tilde{D}}(\tilde{x},\tilde{y}) : \tilde{y} \in \pi^{-1}(y)\} .$$

Dimostrazione. Intanto, siccome π è una applicazione che contrae le distanze di $\tilde{D}$ in D, risulta

$$d_D(x,y) \leq \inf\{d_{\tilde{D}}(\tilde{x},\tilde{y}) : \tilde{y} \in \pi^{-1}(y)\}$$

Supponiamo che esista una $\varepsilon > 0$ tale che

$$d_D(x,y) + \varepsilon < \inf\{d_{\tilde{D}}(\tilde{x},\tilde{y}) : \tilde{y} \in \pi^{-1}(y)\} . \qquad (1.4.1)$$

Dalla definizione di d_D segue che esiste una catena analitica congiungente x e y in D, la cui lunghezza è minore di $d_D(x,y) + \varepsilon$, cioé esistono $\xi_1', \xi_1'', \ldots, \xi_\nu', \xi_\nu'' \in \Delta$, $f_1, \ldots f_\nu \in \mathrm{Hol}(\Delta,D)$ tale che $f_1(\xi_1') = x, f_j(\xi_j'') = f_{j+1}(\xi_{j+1}')$ $(j = 1,\ldots \nu-1)$ $, f_\nu(\xi_\nu'') = y$

e $\sum_{j=1}^{\nu} \omega\,(\xi_j',\xi_j'') < d_D(x,y) + \varepsilon$. Poiché π è un omomorfismo locale, scegliendo opportunamente la catena, possiamo definire una catena analitica in $\tilde{D}$ in guisa tale che

$$\tilde{f}_j \in \mathrm{Hol}(\Delta,\tilde{D}) \quad (j = 1 \dots,\nu) \ , \quad \pi\circ \tilde{f}_j = f_j, \tilde{f}_1(\xi_1') = \tilde{x} \ ,$$

$$\tilde{f}_j(\xi_j'') = \tilde{f}_{j+1}\,(\xi_{j+1}') \qquad (j=1,2,\dots,\nu-1) \ , \quad \tilde{f}_\nu(\xi_\nu'') = \tilde{y}$$

. Pertanto

$$d_{\tilde{D}}(\tilde{x},\tilde{y}) \leq \sum_{j=1}^{\nu} \omega(\xi_j',\xi_j'') < d_D(x,y) + \varepsilon$$

in contraddizione con la (1.4.1) .

C.V.D.

<u>OSSERVAZIONE 5.</u> Il lemma 1.4.6. non vale per C_D .

LEMMA 1 4.7. *Se D ha dimensione finita, allora D è iperbolico se, e solo se, $\tilde{D}$ è iperbolico.*

Dimostrazione. Sia $\tilde{D}$ iperbolico, $x,y \in D$ tale che $d_D(x,y)=0$. Preso $\tilde{x} \in \pi^{-1}(x)$; per il lemma 1.4.6 esiste una successione $\tilde{y}_\nu \in \pi^{-1}(y)$ tale che $\lim_\nu d_{\tilde{D}}(\tilde{y}_\nu,\tilde{x}) = 0$. Quindi $\{\tilde{y}_\nu\}$ converge a $\tilde{x}$ (infatti essendo $\dim D < \infty$, basta applicare la proposizione 1.4.2). Ne segue che $x = \pi(\tilde{x}) = \lim \pi(\tilde{y}_\nu) = \lim y = y$. Perciò D è iperbolico.

Sia ora D iperbolico, e siano $\tilde{x},\tilde{y} \in \tilde{D}$ tale che $d_{\tilde{D}}(\tilde{x},\tilde{y}) = 0$.

Posto $x = \pi(\tilde{x})$ e $y = \pi(\tilde{y})$, è $d_D(x,y) = d_D(\pi,(\tilde{x}),\pi(\tilde{y}))$.

Poiché π contrae le distanze, $d_D(\pi(\tilde{x}),\pi(\tilde{y})) \leq d_{\tilde{D}}(\tilde{x},\tilde{y}) = 0$.

Siccome D è iperbolico, è $x = y$, ossia $\tilde{x}$ e $\tilde{y}$ si trovano sulla stessa fibra di π.

Tenendo conto della proposizione 1.4.2, consideriamo un intorno $\tilde{U}$ di $\tilde{x}$ in $\tilde{D}$ tale che π sia un diffeomorfismo di $\tilde{U}$ su $\pi(\tilde{U})$, con $\pi(\tilde{U})$ ε-intorno di x in D rispetto a d_D cioé $\pi(\tilde{U}) = \{z \in D : d_D(x,z) < \varepsilon\}$. Essendo $\pi(\tilde{x}) = \pi(\tilde{y})$, per provare che $\tilde{x} = \tilde{y}$ basta provare che $\tilde{y} \in \tilde{U}$. Essendo $d_{\tilde{D}}(\tilde{x},\tilde{y}) = 0$, esiste una catena analitica da $\tilde{x}$ a $\tilde{y}$ in $\tilde{D}$ la cui lunghezza è minore di ε . Cioé esistono

$\xi_1' \, \xi_1'', \ldots, \xi_\nu' \, , \xi_\nu'' \in \Delta$, e $f_1 \ldots, f_\nu \in Hol(\Delta,\tilde{D})$, tale che

$f_1(\xi_1') = \tilde{x}$, $f_j(\xi_j'') = f_{j+1}(\xi_{j+1}')$ $(j = 1,2,\ldots,\nu-1)$, $f_\nu(\xi_\nu'') = \tilde{y}$,

e $\sum_{j=1}^{\nu}\omega(\xi_j',\xi_j'') < \varepsilon$. Sia ℓ_j l'arco di geodetica da ξ_j' a ξ_j'' in Δ per ogni $j = 1, \ldots,\nu$. Indichiamo con $\tilde{\ell}$ l'arco di curva da $\tilde{x}$ a $\tilde{y}$ in $\tilde{D}$, ottenuto dalle curve $f_1(\ell_1), \ldots, f_\nu(\ell_\nu)$.

Siccome ℓ_j $(j = 1,\ldots,\nu)$ sono geodetiche in Δ e $\pi \circ f_j (j=1,\ldots\nu)$ sono applicazioni che contraggono le distanze, per ogni $\tilde{z} \in \tilde{\ell}$:

$$d_D(x,\pi(\tilde{z})) = d_D(\pi(\tilde{x}),\pi(\tilde{z})) \leq d_{\tilde{D}}(\tilde{x},\tilde{z}) \leq \sum_{j=1}^{\nu}\omega(\xi_j',\xi_j'') < \varepsilon.$$

Quindi $\ell = \pi(\tilde{\ell})$ è contenuta nell'ε-intorno $\pi(\tilde{U})$ di x, e quindi $\tilde{\ell}$ è contenuta in $\tilde{U}$. Pertanto $\tilde{y} \in \tilde{U}$.

C.V.D.

ESEMPIO 1.4.6. a) Se D è un toro complesso di dimensione n, il rivestimento universale di D è $\mathbb{C}^n$. Quindi $d_D = C_D = 0$.

b) Se D è una superficie di Riemann compatta di genere ≥ 2, il rivestimento universale di D è Δ. Quindi D è iperbolica.

c) Se D è la sfera di Riemann $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, è $d_D = C_D = 0$, come abbiamo già osservato.

d) Se D è una varietà compatta, $C_D = 0$ per il principio del massimo.

Vogliamo costruire ora esempi in cui $0 \neq C_D \neq d_D$.

DEFINIZIONE 1.4.2. Sia D iperbolico. D lo diremo completo se è completo rispetto a d_D, cioé se per ogni $x \in D$ e per ogni $r > 0$ la palla chiusa di centro x e raggio r è un sottoinsieme compatto di D.

Ad esempio, la distanza di Poincaré in Δ(o in π^+) è completa.

La definizione data è equivalente a quella usuale in termini di successioni di Cauchy, ciò però non vale in generale per una distanza qualsiasi.

PROPOSIZIONE 1.4.3. *Se D ha dimensione finita, allora D è iperbolico completo, se e solo se, $\tilde{D}$ è iperbolico completo.*

Dimostrazione. Sia $\tilde{D}$ iperbolico completo. Dal lemma 1.4.7. D

è iperbolico e per la proposizione 1.4.2 la topologia definita da d_D è equivalente a quella relativa di D.

Fissato $\tilde{x} \in \tilde{D}$, sia $\tilde{B}_r = \{\tilde{y} \in \tilde{D} : d_{\tilde{D}}(\tilde{x},\tilde{y}) \leq r\}$ la palla di centro $\tilde{x}$ e raggio r. Sia B_r la palla di centro $x = \pi(\tilde{x}) \in D$ e raggio r per d_D. Dal lemma 1.4.6, abbiamo $B_r \subset \pi(\tilde{B}_{r+\varepsilon})$ per $\varepsilon > 0$. D'altronde essendo $\tilde{D}$ completo, $\tilde{B}_{r+\varepsilon}$ sarà compatta per cui la palla chiusa B_r sarà pure compatta. Pertanto D è completo.

Sia ora D iperbolico completo. Proveremo che $\tilde{D}$ è completo in termini di successioni di Cauchy. Consideriamo dunque una successione $\{\tilde{x}_i\}$ di Cauchy in $\tilde{D}$. Poiché π contrae le distanze, allora $\{\pi(\tilde{x}_i)\}$ è una successione di Cauchy in D, e quindi $\{\pi(\tilde{x}_i)\}$ converge a un punto $x \in D$. Sia U un $2\,\varepsilon$-intorno di x in D con $\varepsilon > 0$ sufficientemente piccolo, allora π induce un omeomorfismo di ogni componente connessa di $\pi^{-1}(U)$ in U.

Sia N un intero tale che $\pi(\tilde{x}_i) \in U'$ per ogni $i > N$, ove U' è l'ε-intorno di x in D, ne segue che ogni punto fuori di U è almeno a distanza ε da $\pi(\tilde{x}_i)$. Indichiamo con $\tilde{U}_i$ la componente connessa di $\pi^{-1}(U)$ contenente $\tilde{x}_i$. Facciamo vedere che per ogni $i > N$, le palle $\{\tilde{y} \in \tilde{D} : d_{\tilde{D}}(\tilde{x}_i,\tilde{y}) < \varepsilon\}$ sono contenute negli $\tilde{U}_i$. Sia $\tilde{y}_\circ \in \tilde{D}$ con $d_{\tilde{D}}(\tilde{x}_i,\tilde{y}_\circ) < \varepsilon$, allora esiste una catena analitica $\{\xi_1', \ldots, f_\nu\}$ da $\tilde{x}_i$ a $\tilde{y}_\circ$ di lunghezza minore di ε, cioé tale che $\sum_{j=1}^{\nu} \omega(\xi_j', \xi_j'') < \varepsilon$. Indichiamo con ℓ_j l'arco geodetico da ξ_j' a ξ_j'' e con $\tilde{\ell}$ la curva da $\tilde{x}_i$ a $\tilde{y}_\circ$ ottenuta dalle curve $f_1(\ell_1) \dots f_\nu(\ell_\nu)$ in $\tilde{D}$. Dalla costruzione fatta segue che $\ell = \pi(\tilde{\ell})$ è contenuta nell'ε-intorno di $\pi(\tilde{x}_i)$ e quindi in U. Pertanto $\tilde{\ell}$ è contenuta in $\tilde{U}_i$ e quindi $\tilde{y}_\circ \in \tilde{U}_i$. Ora detto $\tilde{x}$ il punto di $\tilde{U}_i$ con $\pi(\tilde{x}) = x$, la successione $\{\tilde{x}_i\}$ converge a $\tilde{x}$.

C.V.D.

ESEMPIO 1.4.7. Sia $\Delta^* = \Delta \setminus \{0\}$. Per il teorema di estensione di Riemann $C_{\Delta^*} = C_\Delta$. Quindi C_{Δ^*} non è completa. D'altronde Δ^* è iperbolico completo. Infatti l'applicazione $p : \pi^+ \longrightarrow \Delta^*$ tale che $\xi \longmapsto e^{2\pi i \xi}$, definisce π^+ come rivestimento a infiniti fogli di Δ^* .

Siccome π^+ è iperbolico completo, per la proposizione 1.4.3. Δ^* è iperbolico completo.

In definitiva Δ^* è un esempio per cui:

$$0 \neq C_{\Delta^*} \neq d_{\Delta^*} \quad .$$

ESEMPIO 1.4.8. Per a,b in $\mathbb{C}$, a $\neq$ b, $\mathbb{C} \setminus \{a,b\}$ è iperbolico completo, (cfr.[4] pag. 61) .

TEOREMA 1.4.1. *Sia D un dominio limitato di E spazio di Banach complesso. Se D è omogeneo (i.e. Aut(D) è transitivo) allora C_D e d_D sono distanze complete.*

Questo risultato dovuto a J.P.Vegué (cfr. [16] pag. 279) vale anche per domini limitati in spazi vettoriali complessi di Hausdorff, localmente convessi, localmente limitati e completi per successioni (cfr. [14] prop. 2.4.) .

§ 1.5. APPLICAZIONI.

Le distanze di Carathéadory e di Kobayashi hanno suggestive applicazioni all'analisi complessa ed all'analisi funzionale. Ne indichiamo alcune, rinviando per maggiori dettagli, nonché per altre applicazioni, a [13], [14], [4] .

I) TEOREMA DI PICARD. *Ogni applicazione olomorfa* $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \setminus \{a,b\}$ *con* $a,b \in \mathbb{C}$, $a \neq b$, *è una applicazione costante.*

Dimostrazione. Sia $D = \mathbb{C} \setminus \{a,b\}$, e sia $f \in Hol(\mathbb{C},D)$. Dal lemma 1.4.1 segue che, per $x,y \in \mathbb{C}$,

$d_D(f(x),f(y)) \leq d_{\mathbb{C}}(x,y) = 0$. Poiché D è iperbolico (esempio 1.4.8)

risulta $f(x) = f(y)$ per ogni $x,y \in \mathbb{C}$ e quindi f è costante. Questo è il cosiddetto "piccolo" Teorema di Picard.

GRANDE TEOREMA DI PICARD. *Se* f *è una applicazione olomorfa di* $\{\xi \in \mathbb{C} : 0 < |\xi| < R\} \longrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) - \{3 \text{ punti}\}$, *allora* f *può essere estesa a una applicazione olomorfa di* $\{\xi \in \mathbb{C} : |\xi| < R\} \longrightarrow P^1(\mathbb{C})$.

Questo teorema può essere dimostrato ancora mediante le distanze di Kobayashi. Si veda in proposito la monografia [4] .