§ 1.3. METRICA DI POINCARE' NEL SEMIPIANO.

Accenniamo brevemente al modo in cui le considerazioni precedenti possano formularsi per il semipiano superiore π^+ di $\mathbb{C}$ (per ulteriori dettagli si veda, ad esempio, [11]) .

L'applicazione $C : \pi^+ \to \Delta$ definita dalla $\xi \mapsto \dfrac{\xi - i}{\xi + i}$

è una applicazione biolomorfa di π^+ su Δ(trasformazione di Cayley). Quindi si può determinare mediante C il gruppo $\mathrm{Aut}(\pi^+)$ cioè

$$\mathrm{Aut}(\pi^+) = \{C^{-1} \circ f \circ C : f \in \mathrm{Aut}(\Delta)\}.$$

D'altronde si può procedere direttamente come segue. Consideriamo anzitutto il gruppo

$$SL(2, \mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a,b,c,d \in \mathbb{R} \text{ , } \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 1 \right\} .$$

Si verifica facilmente che, per ogni matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{R})$,

l'applicazione $\qquad g : \xi \longmapsto \dfrac{a\xi + b}{c\xi + d}$

definisce un automorfismo olomorfo di π^+ e che l'applicazione

$\phi' : SL(2, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{Aut}(\pi^+)$ definita dalla

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longmapsto g$$

è un omomorfismo surgettivo di $SL(2, \mathbb{R})$ su $\mathrm{Aut}(\pi^+)$, il cui nuleo è $\mathrm{Ker}\phi' = \left\{\pm\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\}$ = centro di $SL(2,\mathbb{R})$.

Poiché $\mathrm{Aut}(\pi^{+}) \simeq \mathrm{Aut}(\Delta)$ gli omomorfismi surgettivi

$$\phi : S\,U(1,1) \longrightarrow \mathrm{Aut}(\Delta)$$

e

$$\phi' : S\,L(2,\mathbb{R}) \longrightarrow (\mathrm{Aut}(\pi^{+})$$

con $\ker\phi = \ker\phi' = \{\pm\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\}$, definiscono un isomorfismo:

$$\frac{S\,U(1,1)}{\pm\{\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\}} \simeq \frac{S\,L(2,\mathbb{R})}{\{\pm\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\}} .$$

Questo isomorfismo si può rialzare in un isomorfismo $\Psi : S\,U(1,1) \longrightarrow S\,L(2,\mathbb{R})$ nel modo seguente:

posto $j = \begin{pmatrix}1 & i\\ i & 1\end{pmatrix}$, ad ogni matrice $h \in S\,U(1,1)$ associamo la $g = j\cdot h\cdot j^{-1}$. Si verifica facilmente che l'applicazione $h \longmapsto j\cdot h\cdot j^{-1}$ definisce appunto un isomorfismo di $S\,U(1,1)$ su $S\,L(2,\mathbb{R})$ compatibile con gli omomorfismi $S\,U(1,1) \longrightarrow \mathrm{Aut}(\Delta)$ e $S\,L(2,\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{Aut}(\pi^{+})$.

Indichiamo ora un'altra presentazione di $S\,L(2,\mathbb{R})$.

Ad ogni $p \in \mathbb{R}^3$, $p = (\xi,\eta,\delta)$, associamo la matrice hermitiana

$$h = \begin{pmatrix}\delta & \xi+i\eta\\ \xi-i\eta & \delta\end{pmatrix} .$$

Data $g \in SU(1,1)$, la matrice $h' = g \cdot h \cdot {}^t\bar{g}$ è hermitiana.

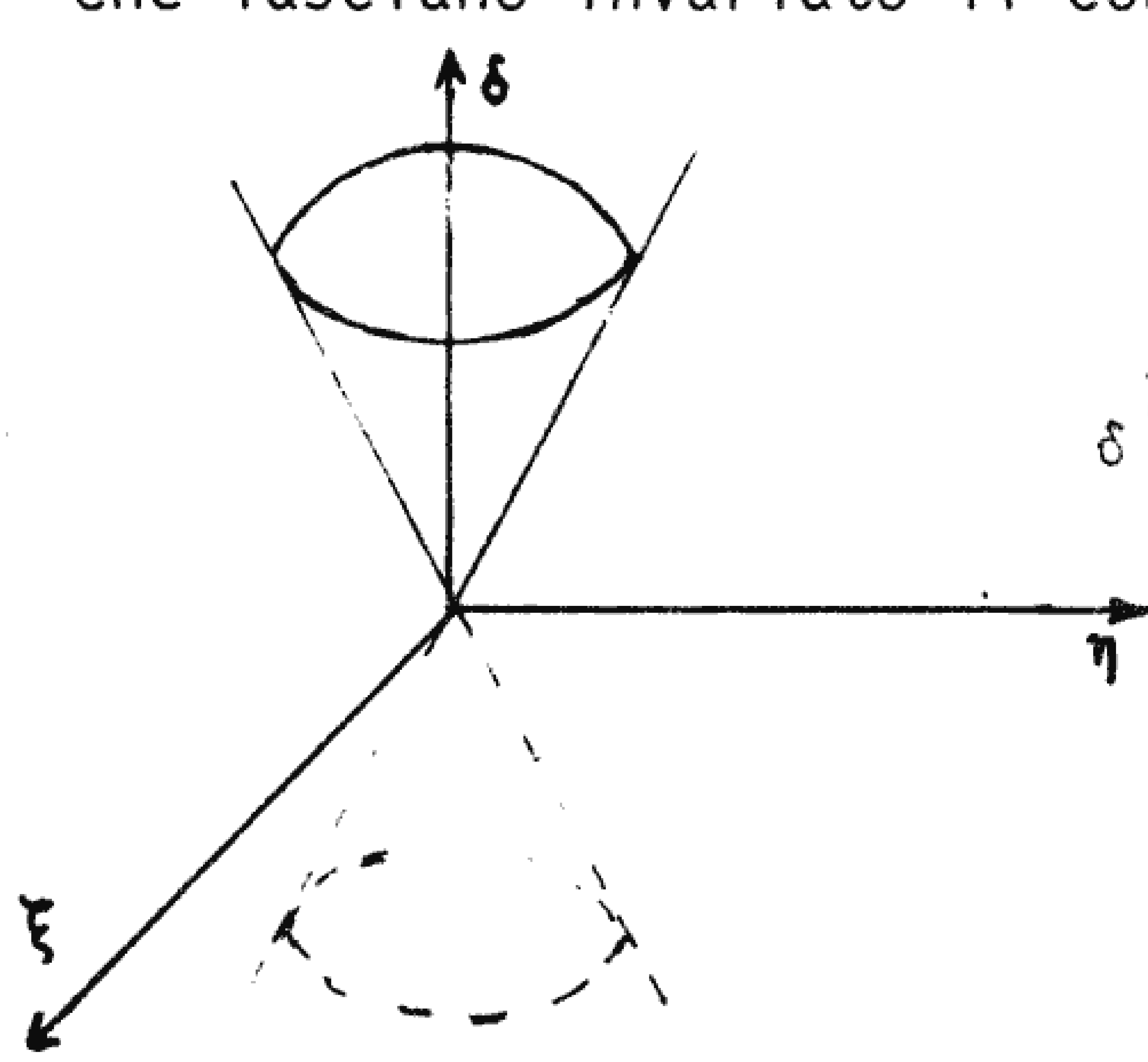
Difatti ${}^t\bar{h}' = {}^t\overline{(g \cdot h \cdot {}^t\bar{g})} = g \cdot {}^t\bar{h} \cdot {}^t\bar{g} = g \cdot h \cdot {}^t\bar{g} = h'$.

Posto quindi $h' = \begin{pmatrix} \delta' & \xi' + i\eta' \\ \xi' - i\eta' & \delta' \end{pmatrix}$ e detto $p' = (\xi', \eta', \delta')$,

ad ogni $g \in SU(1,1)$ possiamo associare l'applicazione

$$T(g) : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{tale che} \quad p \longmapsto p' .$$

L'applicazione $T(g)$ è invertibile, con inversa $T(g^{-1})$, quindi $T(g) \in GL(3,\mathbb{R})$. Inoltre $T(g) \in G'$ gruppo delle trasformazioni di $\mathbb{R}^3$ che lasciano invariato il cono in figura



$$\delta^2 - \xi^2 - \eta^2 = 0$$

Infatti $\delta'^2 - \xi'^2 - \eta'^2 = \det(h') = \det(g \cdot h \cdot {}^t\bar{g}) = \delta^2 - \xi^2 - \eta^2$.

L'applicazione $T : SU(1,1) \longrightarrow G'$ definita dalla $g \longrightarrow T(g)$

è un omomorfismo, il cui nucleo è $\ker T = \left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

L'immagine di T è $SO(2,1)$ gruppo delle matrici reali 3x3, con determinante 1, che lasciano invariato il cono $\delta^2 - \xi^2 - \eta^2 = 0$ (detto il gruppo di Lorentz reale).

Si verifica che $SL(2,\mathbb{R})$ è il rivestimento a due fogli del gruppo $SO(2,1)$.

§ 1.4. PSEUDO-DISTANZE DI KOBAYASHI E DI CARATHÉODORY .

Indicheremo con D indifferentemente o una varietà complessa connessa, o una spazio analitico complesso, o un dominio (i.e. un aperto connesso) di $\mathbb{C}^n$, o infine un dominio di uno spazio vettoriale topologico complesso localmente convesso e di Hausdorff E. Se D è un dominio di E ed E_1 è un altro spazio dello stesso tipo di E, una applicazione olomorfa $F : D \longrightarrow E_1$ e per definizione una applicazione continua di D in E_1 tale che, per ogni $(x,y) \in D\times(E\setminus\{0\})$ e per ogni forma lineare continua λ_1 su E_1, la funzione a valori complessi $\xi \longrightarrow \lambda_1 \circ F(x+\xi y)$ è olomorfa sull'aperto $\{\xi\in \mathbb{C} : x+\xi y \in D\}$ di $\mathbb{C}$.

Se D_1 è un dominio di E_1, con $\mathrm{Hol}(D,D_1)$ denoteremo l'insieme di tutte le applicazioni olomorfe $F : D \longrightarrow E_1$ tale che $F(D) \subset D_1$.

Per fissare le idee, nel seguito ci riferiremo prevalentemente al caso in cui D è un dominio, lasciando al lettore di adattare le nostre considerazioni agli altri casi sopra indicati.

La pseudo-distanza di Carathéodory in D, si indica con C_D,ed è definita nel modo seguente: