

§ 8. UNA REALTA' A PIU' DIMENSIONI.

Resta da discutere se i risultati fondamentali della cosiddetta "teoria KAM" (da Kolmogorov-Arnold-Moser) debbano considerarsi come una risposta conclusiva al problema fisico-matematico della meccanica celeste. Mi pare che la risposta debba essere dialettica: se da una parte questi risultati sono decisivi, e non possono più essere ignorati dai ricercatori in astronomia come dai filosofi della scienza, dall'altra occorre tenere presente l'insorgere di tre ordini di difficoltà: quelle matematiche, quelle fisiche, quelle di metodologia sperimentale.

Le difficoltà matematiche derivano principalmente dall'osservazione, già anticipata al § 4, che una parte delle difficoltà del problema degli n corpi ($n \geq 3$) deriva dall'elevata dimensionalità dello spazio delle fasi. Ora i teoremi di Kolmogorov-Arnold e di Siegel-Moser si estendono al caso di N gradi di libertà dimostrando *l'esistenza di tori invarianti di dimensione N* (nello spazio delle fasi di dimensione $2N$) *su cui il moto è condizionalmente periodico non degenerare*. Ma sulla varietà di livello dell'integrale primo I noto (per esempio $I = H$ integrale di Jacobi nel caso del problema dei 3 corpi ristretto spaziale, con $N = 3$) che hanno dimensione $2N-1$, un toro di dim. N non separa lo spazio perchè ha codimensione $N - 1 > 1$ (per $N \geq 3$). Perciò un'orbita periodica di 1^a specie nel problema ristretto tridimensionale è "circondata" da tori $S^1 \times S^1 \times S^1$ invarianti, ma mescolate inestricabilmente a questi vi sono regioni piene di orbite che possono aggirare i tori ed avvicinarsi come allontanarsi indefinitamente dall'orbita periodica di 1^a

specie: queste sono esattamente le regioni in cui i termini secolari o a lungo periodo della perturbazione producono effetti che restano imprevedibili ancora oggi, 200 anni dopo Lagrange. Perciò lo studio delle intricate proprietà topologiche del moto in queste regioni "quasi-ri-sonanti" resta un problema significativo aperto, così come resta il problema di calcolare numericamente un esempio significativo di orbita in queste regioni.

Le difficoltà fisiche sono legate ai mutamenti che ha subito la concezione generale del sistema solare e della sua storia; ai tempi di Newton la concezione prevalente sull'età dell'Universo era quella su cui si basò l'arcivescovo J. Ussher (1658) per calcolare, in base alle genealogie bibliche, l'età dell'Universo: secondo i suoi calcoli, l'Universo era stato creato nel 4004 A.C. (errore probabile: ± 1 anno) (+) Se i tempi sono di questo ordine di grandezza, allora i metodi perturbativi sono perfettamente adeguati a descrivere le condizioni iniziali del sistema solare al momento della creazione; ed i teoremi di Lagrange, Laplace, Poisson, anche se dimostrano non *l'invariabilità* né la *stabilità* dei semiassi maggiori delle orbite planetarie, ma solo che la derivata prima e in un certo senso anche la seconda dei semiassi maggiori rispetto al parametro perturbativo sono costanti nel tempo (tolti i termini periodici), erano dei risultati adeguati ad assicurare la "stabilità pratica" del sistema solare su tempi dell'ordine delle migliaia di anni. Ma già Laplace e Kant avevano

(+) Giordano Bruno non era d'accordo, e anche per questo fece una brutta fine (1600).

allargato di molto la scala dei tempi dell'età dell'Universo, formulando delle teorie sulla nascita del sistema solare da una nebulosa primigenia: teoria che sembra chiaramente incompatibile con un creazionismo che accetti la lettera del testo Biblico, anche se non mi pare che Laplace si sentisse in grado di indicare quali tempi ipotizzare per la durata del sistema solare né per la durata del processo di formazione dello stesso.⁽⁺⁺⁾

Nell'800 si sovrappone, nello stesso arco di anni, il prevalere di uno spirito più critico sul concetto di infinito in matematica, a partire da Cauchy, che portò naturalmente alla ricerca di soluzioni definite da serie convergenti per t tra $-\infty$ e $+\infty$ (Delaunay, Hill, Glyden, Linstedt, etc.); e il dibattito filosofico-scientifico sulla teoria dell'evoluzione delle specie.

Infatti, tra le molte obiezioni avanzate alla teoria di *Charles Darwin* (1859) sull'evoluzione delle specie fino all'uomo, vi era anche quella apparentemente fondata che l'evoluzione postulata da Darwin, se non si ammettono meccanismi discutibili come la trasmissione di caratteri acquisiti, richiede in base alla sola selezione naturale un numero enorme di generazioni, incompatibile, almeno per gli animali superiori, con un arco di tempo di poche migliaia di anni. La risposta decisiva a questa obiezione venne soprattutto dalla geologia, che con i progressi

(++) Poichè ancora nel'700 in Francia si celebravano crudelissimi processi per eresia, di cui ci dà vivida testimonianza Voltaire, può darsi che Laplace non volesse sbilanciarsi. Potrebbe essere interessante decidere questo punto con una ricerca storica precisa.

della tecnica stratigrafica nata alla fine del '700 mostrò sulla base di una evidenza "terrestre" che l'età della terra era di molti milioni di anni; tuttavia anche gli studi astrofisici ebbero un ruolo importante.

Fu *George Darwin* (figlio di Charles Darwin) a studiare per primo in modo quantitativo l'effetto di attrito della marea lunare sulla terra. Da questo studio risulta che la Terra rallenta lentamente il suo moto di rotazione cedendo momento angolare al moto di rivoluzione della Luna che si allontana; se si suppone che Terra e Luna si siano formate da un corpo ruotante unico per scissione⁽⁺⁾, allora il processo di allontanamento della Luna e di rallentamento della rotazione terrestre non può essere durata meno di 50 milioni di anni, limite minimo (corrispondente ad un rendimento del 100°/° del ciclo meccanico della marea) certamente di molto inferiore alla realtà.

Questo risultato, poi precisato e ampliato da Poincaré, è di importanza decisiva perchè da una parte rafforza la teoria dell'evoluzione, avvicinando di molto l'età prevista della Terra alla scala di tempi oggi in uso (4,6 miliardi di anni per la Terra, circa 15 miliardi di anni per l'Universo); dall'altra perchè è forse il primo risultato (quantitativo) di astronomia che non è basato sui presupposti della *meccanica celeste*: cioè non suppone che il sistema dinamico sia *conservativo*. I corpi celesti non solo non sono "eterni, divini ed immutabili" (Platone) e non scorrono su "volte tanto più divine quant'elle son dal centro più remote" (Dante, Paradiso XXVIII) ma la loro imperfezione diventa non

(+) e anche in altre ipotesi complicate da descrivere, per esempio la "cattura mareale".

solo teoricamente possibile, ma anche oggetto di misure fisiche, e causa di attriti come quelli normali nella meccanica terrestre, anche se più piccoli in rapporto alle grandezze in giuoco. In questo contesto il problema della stabilità del sistema solare acquista un significato molto diverso, tanto che si può ricercare - almeno per i sistemi pianeta / sa tellite - un tipo diverso di stabilità, la *stabilità asintotica*. In con clusione nella ricerca attuale il problema della stabilità del sistema solare deve essere affrontato in tre modi diversi su tre scale di tempi diverse; con tecniche perturbative (o numeriche) per archi di tempo di migliaia di anni; con metodi basati sulla teoria delle risonanze e dei piccoli divisori per archi di tempo di milioni di anni; con modelli non conservativi su scale di tempo di miliardi di anni.

Resta da accennare alle difficoltà insite nella ricerca di corrispondenze tra teorie matematiche raffinate con la KAM e le osservazio ni. Va detto che un esame preciso di questa corrispondenza è ancora da fare: la figura dimostra chiaramente che la teoria rende ragione di molte caratteristiche qualitative delle osservazioni per quanto riguarda la fascia asteroidale (trattata come problema dei 3 corpi ristretto) : i "gap di Kirkwood" si presentano in corrispondenza delle risonanze con ordine di risonanza ≤ 3 che, come dimostrò Levi-Civita, sono instabili; in presenza di risonanze con ordine 4 e 5 vi sono dei gap meno pronunciati (non è ancora stata pubblicata alcuna dimostrazione della stabilità delle risonanze di ordine 4 , anche se Siegel e Moser affermano che esse sarebbero stabili).

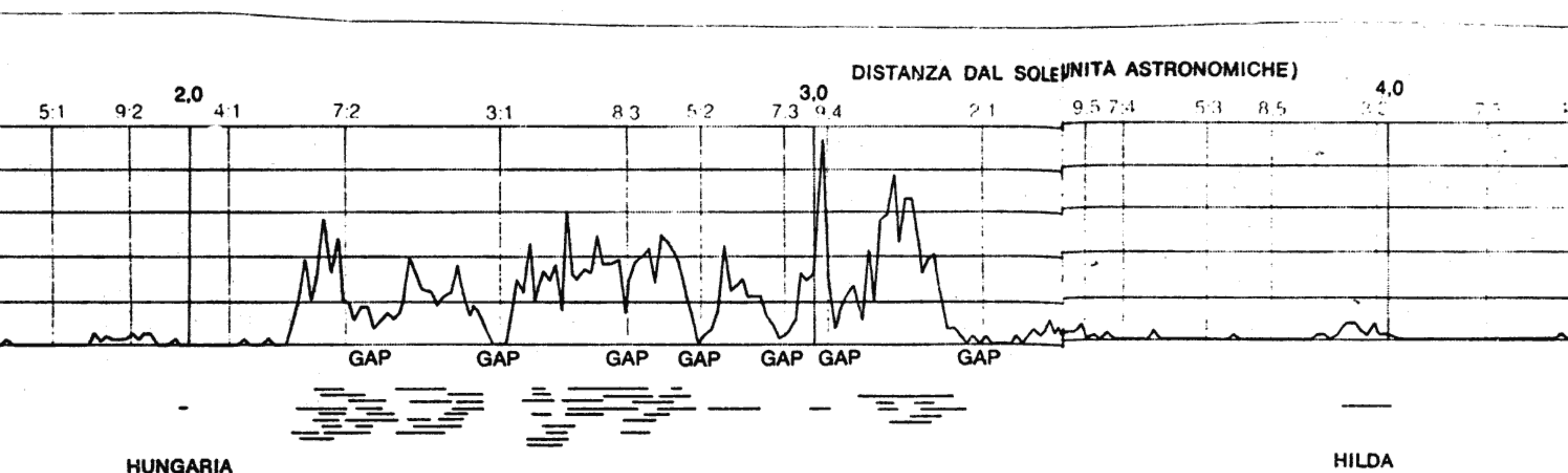


Fig.11: i "gap" di Kirkwood nella distribuzione degli asteroidi tra Marte e Giove. Le risonanze $4/1$, $3/1$, $5/2$ e $2/1$ sono certamente instabili nell'approssimazione del problema ristretto piano (Levi-Civita); quelle $7/2$, $8/3$ e $9/4$ sono stabili (Moser); quella $7/3$ è probabilmente stabile (Siegel e Moser). (da "Il sistema solare nelle esplorazioni spaziali" cit.).

Tuttavia una teoria quantitativa della profondità e larghezza dei gap non sembra ancora pronta, anche se la teoria KAM potrebbe forse essere impiegata anche per questo.

Ma non si può parlare della verifica sperimentale odierna delle teorie meccaniche senza accennare al fatto che l'uso dei calcolatori elettronici recenti (a circuiti integrati) rende possibile uno studio numerico delle orbite saltando le metodologie analitiche tradizionali, partendo dalle equazioni di Newton in coordinate cartesiane (per es.

con i metodi di *Cowell* e di *Adams*).

Il conflitto culturale tra "numerici" e "analisti" sembra al centro del dibattito scientifico attuale; poichè tuttavia i dati sperimentali deducibili dalle traiettorie delle sonde spaziali sono utilizzabili solo se filtrati attraverso una considerevole analisi numerica dei dati, e nello stesso tempo è un'illusione pensare che non vi siano limiti all'uso dei metodi tipo differenze finite nella soluzione di equazioni differenziali *per un lungo arco di tempo*, sembra difficile che una verifica delle teorie meccaniche (sia classiche che relativistiche) su problemi delicati come gli asteroidi o i satelliti dei pianeti esterni possa essere ottenuta senza una sintesi dei due tipi di metodologie.

Bibliografia:

- H. Poincaré, "*Leçons sur les Hypothèses Cosmogoniques*" Hermann 1913
 G. Darwin, "*La Marea*" Torino 1905
 A. A. V. V. , "*Il sistema solare nelle esplorazioni spaziali*" ed. Le Scienze , 1976 .
 R. Greenberg, "*Orbit-Orbit resonances in the solar system: varieties and similarities*" *Vistas in Astronomy* 21 (1977) 209-239.