§ 7. TORI INVARIANTI E MOTI CONDIZIONALMENTE PERIODICI.

Nella sua famosa e premiata (dal re di Svezia) memoria sul problema dei tre corpi, in cui dimostrava il teorema di inesistenza degli integrali primi di cui abbiamo appena parlato, Poincaré asseriva che questo avrebbe implicato l'inesistenza di soluzioni condizionalmente periodiche, esprimibili in serie della forma:

$$z(t) = \sum_{k_1 k_2} A_{k_1 k_2}(L,G)\, e^{i(k_1 \ell + k_2 z)}$$

anche in assenza di termini secolari dovuti a "risonanze esatte" $k_1 n - k_2 = 0$.

Weierstrass però non rimase convinto, e scrisse in una lettera il caustico commento: "Questa osservazione, che è di fondamentale significanza, viene data senza dimostrazione" . In effetti il teorema di Poincaré sugli integrali primi esclude che il problema dei 3 corpi possa essere completamente integrabile nel senso del teorema di Liouville-Arnold, cioè che un intero aperto possa essere riempito di tori invarianti $T(A,B)$, definiti da $H = A$, $I = B$ (un altro integrale) su cui il moto risulterebbe quasi periodico o periodico a seconda del numero di rotazione.

Perciò alcuni dei tori invarianti presenti nel problema dei 3 corpi ristretto per $\mu = 0$ sono "distrutti dalla perturbazione" per $\mu > 0$. Questo non significa affatto che alcuni altri tori invarianti non siano "conservati" per $\mu > 0$ (cioè che una loro deformazione con parametro μ non sia invariante anche per $\mu > 0$) con tutto il loro corredo di orbite condizionalmente periodiche.

Per avere una intuizione geometrica della situazione possiamo abbassare la dimensionalità della situazione fissando prima il valore della *costante di Jacobi* H , in modo che il moto (20) si svolga su di una fissa varietà di dimensione 3 nello spazio di coordinate (ℓ, z, L, G). Facciamo quindi una *sezione trasversale* al moto: troveremo una superficie S di dimensione 2 , tale che i punti di S (di un aperto su S) stanno su orbite che restano distinte almeno per un certo tempo T . Se però si considerano le orbite globalmente, ogni orbita incontra S più volte. Per esempio se γ_0 è un'orbita periodica, possiamo supporre che γ_0 attraversi S solo in un punto $S \cap \gamma_0$, però l'orbita ripasserà dello stesso punto $\gamma_0 \cap S$ di S dopo ogni periodo. Consideriamo allora *l'applicazione di Poincaré* di S in sé definita dal seguire ogni orbita di P_3 per un giro attorno a P_1 fino a che incontra di nuovo per la prima volta S : i punti fissi o periodici di questa $\Theta_\mu : S \longrightarrow S$ corrispondono ad orbite periodiche.

Per esempio definiamo S in questo modo: prendiamo per variabili gli integrali primi (29) del problema dei 2 corpi, e la longitudine media $\ell + g$, nel sistema sinodico (ruotante) con $z = g - t$ al posto di g :

$$
(39)\quad \begin{cases} \xi = -\sqrt{2L - 2G}\ \sin z \\ \lambda = \ell + z \\ \eta = \sqrt{2L - 2G}\ \cos z \\ \Lambda = L \end{cases} \qquad \textit{Variabili di Poincaré}\ (\xi, \lambda, \eta, \Lambda)
$$

queste conservano la forma canonica delle equazioni, con nuova hamiltoniana uguale alla vecchia , nelle nuove variabili, per esempio per $\mu = 0$:

$$(40) \qquad H_o = -\frac{1}{2L^2} - G = -\frac{1}{2\Lambda^2} - \Lambda + \frac{1}{2}(\xi^2+\eta^2)$$

e per di più sono definite anche per $e = 0$, cioè $L = G$, cioè sulle orbite circolari, purchè si ponga in tal caso $\lambda = \theta - t$.

Come sezione trasversale S prendiamo $\lambda = 0$. Allora per $\mu = 0$ vi sono i tori invarianti $L = \text{cost}$, $G = \text{cost}$ cioè $H_o = \text{cost}$, $2L-2G = = \text{cost}$ che tagliano S in circonferenze $\frac{1}{2}(\xi^2+\eta^2) = \tau = \text{costante}$ su cui stanno o punti periodici cioè fissi per Θ^p , p intero, o le tracce su S di orbite condizionalmente periodiche (a seconda del nume-

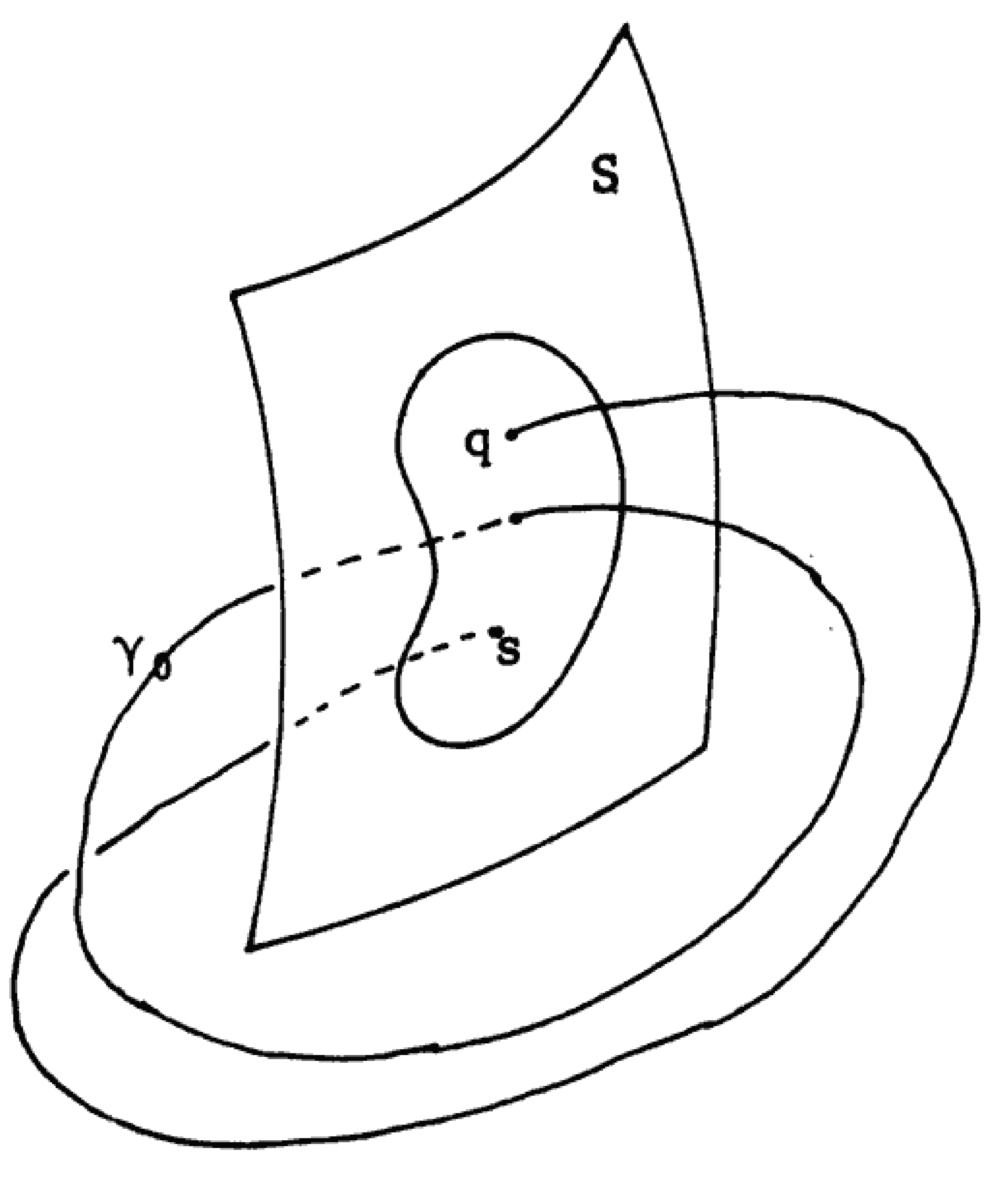

Fig.8: l'applicazione di Poincaré

$\Theta_\mu(q) = s$

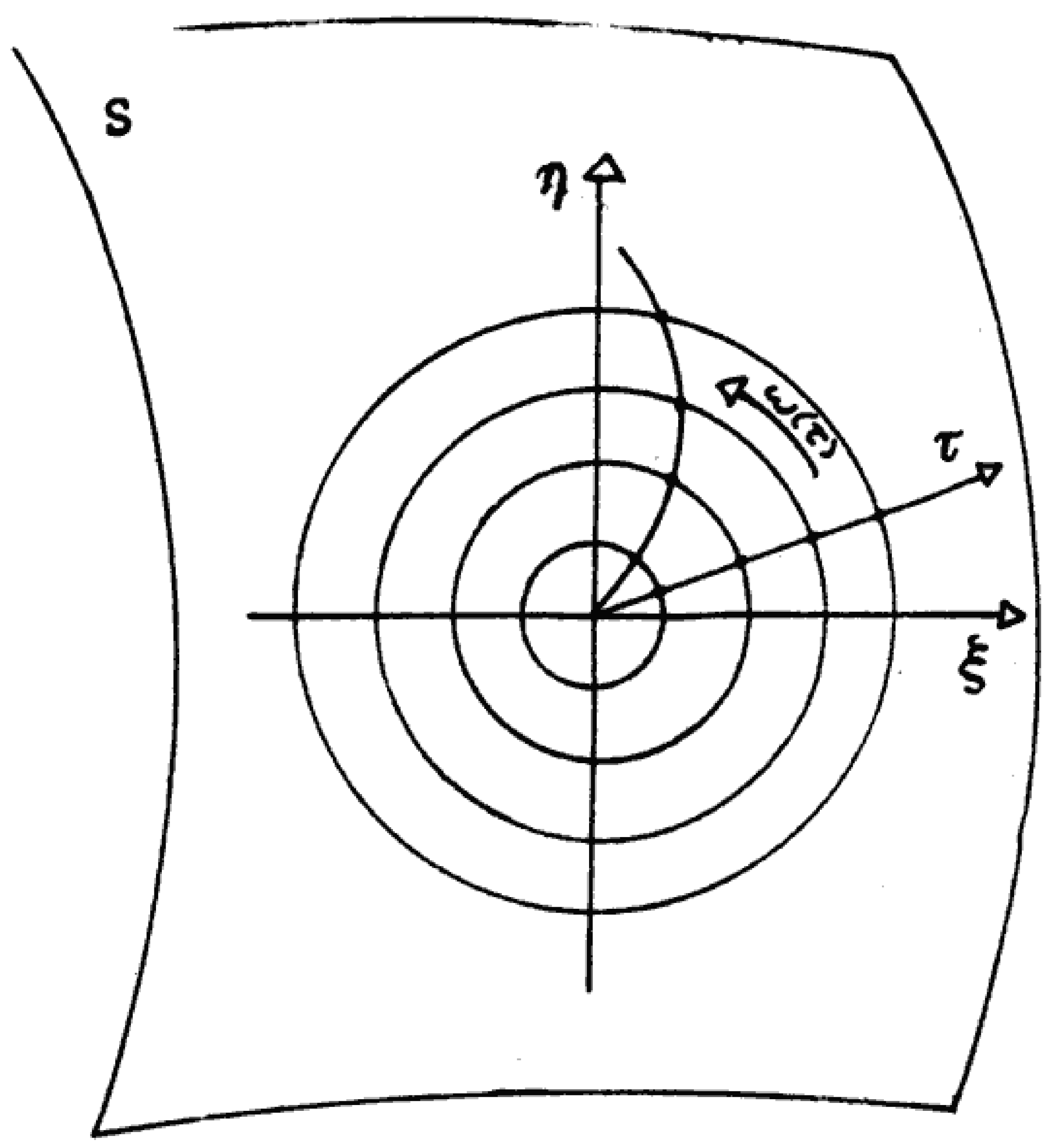

Fig.9: tracce su S dei tori invarianti per $\mu = 0$

ro di rotazione), tutte orbite ellittiche in realtà nel riferimento sidereo (fisso). Allora quando λ aumenta di 2π , cioè quando si ripassa da S perchè λ è un angolo , z aumenta e l'applicazione di Poincaré è una rotazione di un angolo $\omega(\tau)$ (nel piano ξ ,η), angolo che dipende da $\tau = \frac{1}{2}(\xi^2 + \eta^2)$.

Ora $\lambda = \ell + g - t$, $\ell = n\,(t - t_o)$ e perciò quando , sull'orbita , λ aumenta di 2π , è passato il tempo $2\pi\,(n-1)^{-1}$, e z è aumentato di $2\pi(n-1)^{-1}$ perciò su $\tau = L - G =$ $=$ cost, $\omega(\tau) = \dfrac{2\pi}{n-1}$ dove $n = \dfrac{1}{L^3}$ è il moto medio sull'orbita di energia H_o (G deve essere eliminato tramite $H_o = -\dfrac{1}{2L^2} - G =$ cost). Semplici calcoli consentono allora di sviluppare in serie la funzione $\omega(\tau)$, analitica in τ :

$$
(41)\qquad \begin{cases} \omega(\tau) = \omega_o + \omega_1 \tau + \dots \\[2mm] \omega_o = \dfrac{2\pi}{n_o - 1} \qquad \omega_1 = \dfrac{6\pi n_o^{4/3}}{(1-n_o)^3} \quad \dots \end{cases}
$$

dove n_o è il moto medio sull'orbita circolare $\xi = \eta = 0$;
cioè l'applicazione ϑ_0 in coordinate polari $\rho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$, z si scrive:

$$
(42)\qquad \begin{cases} \rho_1 = \rho_o \\[2mm] z_1 = z_o \quad \omega_o \quad \omega_1 \tau - \tau^2 \omega_2 \quad \dots\dots \end{cases}
$$

ω_o - *Twist map di Moser*

Ora dalla (42) si deduce che la matrice jacobiana A di Θ_0 in $\xi = \eta = 0$ ha autovalori $\pm i\,\omega_\circ$ (purchè $\omega_\circ$ sia ben definito, cioè $n_\circ \neq 1$); perciò $\det(A - \nu I) = 0$ non ha tra le sue soluzioni $\nu = 1$ purchè

(43) $$\omega_\circ \neq 2k\pi \qquad k \text{ intero },$$

e quindi l'equazione del punto fisso

(44) $$\Theta_\mu(\xi,\eta) = (\xi,\eta)$$

la cui soluzione è (0,0) per $\mu = 0$, ha una ed una sola soluzione vicina a (0,0) per μ abbastanza piccolo, per il teorema della funzione implicita ordinario. Perciò per μ abbastanza piccolo esiste una orbita periodica che è la continuazione dell'orbita circolare $\xi = \eta = 0$, purchè valga la (43) cioè purchè : $\omega_\circ = \frac{2\pi}{n_\circ - 1} \neq 2k\pi$ cioè

$n_\circ - 1 \neq \frac{1}{k}$, k intero,"*ordine di risonanza* > 1" . Tale orbita periodica si dice *orbita periodica di 1ª specie* (di Poincaré) del problema (20).

Questo risultato ottenuto con il teorema delle funzioni implicite elementare ci pone l'interrogativo: esiste un'altra forma di teorema delle funzioni implicite che ci consenta di trovare non un punto fisso, ma una curva invariante chiusa

(45) $$\gamma_\mu : s \longmapsto (\xi(s)\ \eta(s)) \qquad \gamma_\mu(s) = \gamma_\mu(s+2k\pi)$$

tale che su di essa il flusso sia lineare nel parametro s , cioè valga :

(46) $\quad \gamma_\mu(s+2\pi\sigma) = \Theta_\mu \circ \gamma_\mu(s) \qquad s \in R$

per ogni $\mu \geq 0$ abbastanza piccolo?

Ogni simile curva invariante su S darebbe luogo ad un toro invariante nello spazio delle fasi, e quindi ad un sistema ad 1 parametro s di soluzioni condizionalmente periodiche. Già *G.D. Birkhoff* (1927) trovò una serie di potenze che definiva formalmente un cambiamento di variabili con cui era possibile ricondurre l'applicazione Θ_μ di Poincaré per $\mu > 0$ alla forma (42) che essa aveva per $\mu = 0$, con $\omega_\circ = \omega_\circ(\mu)$, $\omega_1 = \omega_1(\mu)$ ... Tuttavia tale cambiamento di variabili non poteva convergere in un intero intorno di $\xi = \eta = 0$ perchè altrimenti vi sarebbero stati troppi tori invarianti, tanti da contraddire il teorema degli integrali primi: ed in effetti nella definizione della funzione generatrice W della trasformazione cercata da Birkhoff compaiono i *piccoli divisori* $k_1 n - k_2$ che possono annullarsi per $n = \frac{1}{L^3}$ razionale o essere tanto "piccoli" da far divergere la serie.

Soltanto negli anni '60 fu possibile provare che tuttavia la funzione generatrice e quindi la trasformazione erano definite su *alcuni* tori, il che equivale a trovare le curve invarianti (45), (46) : precisamente sia $\Lambda = L$ tale che $n = \frac{1}{L^3}$ sia non solo irrazionale, ma non troppo ben approssimabile con i razionali, cioè tale che esistano due costanti $c(n)$, $r(n) > 0$ tali che :

(47) $\quad | k_1 n - k_2 | \geq c\{ | k_1 | + | k_2 | \}^{-r} \qquad (k_1, k_2) \neq (0,0)$

Allora *il toro invariante definito da* $H_\circ$, $\Lambda = L$ *è conservato per*

$\mu > 0$, *cioè esiste una curva invariante* γ_μ che soddisfa (45) e (46) con $\sigma = \frac{1}{n-1}$, $n = \frac{1}{L^3}$, identicamente rispetto a μ *per* μ *abbastanza piccolo.*

(Teorema di Kolmogorov - Arnold, 1963).

Ora i numeri irrazionali n che soddisfano alla (47) per qualche c , r sono quasi tutti (il loro complementare ha misura 0) ma non riempiono alcun intervallo: cioè "quasi tutti" i tori sono conservati per qualche $\mu \geq 0$, però nessun aperto può essere riempito di tori conservati. Al contrario i tori con numero di rotazione razionale sono "distrutti" dalla perturbazione e di essi restano solo orbite periodiche isolate, continuazione di orbite ellittiche risonanti del problema dei 2 corpi in coordinate sinodiche (*orbite periodiche di 2ª specie di Poincaré-Birkhoff-Arenstorf*).

Questo risultato non solo risponde positivamente alla domanda sull'esistenza di soluzioni "condizionalmente periodiche" posta da Weierstrass (e Platone), ma consente di risolvere il problema della stabilità delle soluzioni.

Prendiamo infatti un'orbita risonante circolare con $q n_\circ - p = 0$; per $\mu > 0$ da essa si otterrà per deformazione un'orbita periodica di 1ª specie. Con tecniche ancora più sottili di quelle di Arnold, *Moser e Siegel* hanno provato che se $\omega_\circ \neq \frac{2\pi k}{h}$, $h = 1,2,3,4$, k int., cioè se

$$(48) \qquad n_\circ \neq 1 + \frac{h}{k} \qquad h = 1,2,3,4 \ , \ k \text{ int. ovvero } n_\circ \neq p/q \text{ con} |p| - |q| \leq 4$$

(*ordine di risonanza* > 4), allora *in un intorno piccolo a piacere di* $\xi = \eta = 0$ *l'applicazione* Θ_μ *possiede (per* μ *abbastanza piccolo) infinite curve invarianti* (45) (46) . Perciò l'orbita periodica α di 1ª specie ottenuta dal punto unito di Θ_μ è circondata da tori invarianti arbitrariamente vicini, che sulla superficie di livello di H_0 in cui si svolge il moto *separano un sistema fondamentale di intorni di* α *dall'esterno rendendoli invarianti per il flusso integrale*: ogni condizione iniziale assegnata vicino ad α dà perciò luogo ad una soluzione per sempre ($t \in \mathbb{R}$) imprigionata tra due tori invarianti. (*Stabilità per* $t \longrightarrow \pm\infty$). La situazione estremamente complicata che si produce nell'intorno di una di queste orbite periodiche risonanti di 1ª specie è descritta dalla figura (da Arnold) nella quale possiamo notare che delle orbite periodiche di 2ª specie alcune sono stabili e circondate a loro volta da tori invarianti, altre instabili e accompagnate da varietà invarianti che si intersecano tra loro dando luogo ad un intrico di intersezioni (*punti eteroclinici ed omoclinici*).

Gran parte della teoria moderna dei sistemi dinamici strutturalmente stabili nasce dallo studio di queste varietà invarianti, ma questo discorso ci porterebbe fuori tema.

Bibliografia:

A.N. Kolmogorov, "*The general theory of dynamical systems and problems of stability of motion in classical and celestial mechanics*" Address to 1954 International Congress of Mathematicians ; ristampato in Abraham, R. - Marsden J. ," *Foundations of mechanics*" Benjamin 1967

./.

Bibliografia:

./. V. Arnold, "*Small denominators and problems of stabilityof motion in classical and celestial mechanics*" Russian Mathematical Surveys 1963 .

J. Moser, "*Stable and random motions in Dynamical Systems*" Princeton University Press 1973 .

C.L. Siegel - J.K. Moser, *Lectures on celestial mechanics*" Springer 1971 .

Fig.10: struttura qualitativa delle curve invarianti nell'intorno di un punto su di un'orbita periodica di prima specie con ordine di risonanza > 4 (da Arnold cit.).