§ 6. SISTEMI PIU' O MENO INTEGRABILI.

Che cosa vuol dire saper integrare, in maniera esatta, un sistema di equazioni differenziali ordinarie, come per esempio quello del problema dei tre corpi ristretto piano (20)? Si sa dai lavori di Cauchy (1827) che le soluzioni di un'equazione ordinaria come la (20) sono sviluppabili in serie di Taylor in un intorno del punto iniziale (purchè lo siano anche i secondi membri, come nel nostro caso) in funzione sia del tempo che delle condizioni iniziali. Allora usando il teorema delle funzioni implicite si vede che (per un'equazione autonoma) devono esistere, sempre in un intorno, *n-1 integrali primi funzionalmente indipendenti* (se n è il numero delle variabili dipendenti, nel nostro caso $n = 4$) funzione delle sole variabili dipendenti e non del tempo:

$$I(\ell, z, L, G) = I$$

tali che

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\partial I}{\partial \ell}\dot{\ell} + \frac{\partial I}{\partial z}\dot{z} + \frac{\partial I}{\partial L}\dot{L} + \frac{\partial I}{\partial G}\dot{G} = \frac{\partial I}{\partial \ell}\frac{\partial H}{\partial L} + \frac{\partial I}{\partial z}\frac{\partial H}{\partial G} - \frac{\partial I}{\partial L}\frac{\partial H}{\partial \ell} -$$

$$- \frac{\partial I}{\partial G}\frac{\partial H}{\partial g} = [I,H] = 0 \quad . \quad \text{"\textit{Parentesi di Poisson}".}$$

Se si conoscono n-1 integrali I, e la *legge oraria* (cioè un ulteriore integrale primo dipendente dal tempo) si può asserire di avere completamente integrato il sistema di equazioni (si intende a meno di inversioni o esplicitazioni di funzioni implicite), il tutto in un intorno del punto e istante iniziali.

Purtroppo però il teorema di Cauchy non è di alcuna utilità pratica in meccanica celeste perchè il *raggio di convergenza* delle serie di Taylor che definiscono integrali primi è limitato dalle singolarità dell'equazione (20), e la collisione del corpo P_3 con uno dei due corpi P_1 e P_2 è appunto una singolarità ; ne segue che nessuno degli integrali primi così trovati si estende, a priori, al di là di una frazione di giro attorno ad uno dei due corpi principali, e perciò il metodo delle serie di Taylor non è utilizzabile. (+) In linea di principio si può pensare ad una *continuazione analitica* degli integrali primi locali, ma girando attorno ad una singolarità gli integrali primi possono presentare fenomeni di polidromia: nelle variabili azione--angolo questo corrisponde ad avere funzioni $I(\ell,z,L,G)$ anche definite "globalmente" per ogni valore di ℓ,z e per valori di L,G in un aperto, ma non periodiche di periodo 2π nelle variabili angolo ℓ,z . Allora quale è il numero giusto di integrali primi (indipendenti tra loro e dal tempo) "uniformi" , o "isolanti" cioè globali, che dobbiamo aspettarci?

Nel problema dei due corpi vi erano tre integrali primi L,G e g ; o più esattamente, se vogliamo eliminare la polidromia della funzione g (argomento del pericentro) usando invece integrali primi periodici di periodo 2π in g , possiamo prendere gli integrali primi

$$L\ , \quad \sqrt{2L - 2G}\cos g, \quad \sqrt{2L - 2G}\sin g \tag{29}$$

che sono indipendenti funzionalmente in tutto il dominio di Delaunay.

Il teorema di Bertrand ci avverte però che la presenza dell'integra-

(+) Si pone semmai il problema della *regolarizzazione*, cioè di un cambiamento sia di variabili dipendenti che di parametrizzazione dell'asse dei tempi che renda possibile lo sviluppo in serie convergenti delle

./.

le g è un fatto eccezionale che si presenta solo, nel problema dei due corpi, per la legge di Newton e per quella di Hooke; normalmente i numeri di rotazione sui tori $L = \text{cost}$, $G = \text{cost}$ sono variabili con L e G , e perciò le orbite anzichè essere sempre periodiche sono talvolta periodiche e talvolta dense nel toro che le contiene, nel qual caso una funzione continua non potrà essere costante su di un'orbita se non lo è su tutto il toro.

Questa proprietà sarà conservata da "quasi tutte" le perturbazioni del problema dei due corpi, e perciò non ci dobbiamo aspettare di trovare più di 2 integrali uniformi; al contrario il massimo di integrabilità possibile sarà quello del caso del teorema di Liouville-Arnold, sarà cioè il caso in cui esistono due integrali primi come L,G e due variabili angolo soddisfacenti ad equazioni del tipo già visto (a "frequenze costanti" su ogni toro). Perciò il passaggio alle coordinate rotanti, cioè alle variabili angolo $z = g - t$ ed ℓ anzichè g,ℓ, non comporta il sacrificio di alcun integrale primo salvo che per $\mu = 0$. Si tratta però di vedere se per $\mu > 0$ possono continuare ad esistere due integrali primi indipendenti, e perciò dei tori invarianti che siano la "*continuazione*" (cioè la deformazione con parametro μ) dei tori $T(E,J)$ che riempiono il dominio di Delaunay nel problema dei 2 corpi. Poichè in tal caso il teorema di Liouville-Arnold ci assicura che le soluzioni sono ottenibili per quadrature (sia pure più generali

---

./. (+) soluzioni per ogni t . Questo problema, posto da Weierstrass, fu risolto solo nel secolo XX da Levi Civita (1904) e Sundmann (1907).

di quelle del § 3), rispondere a questa domanda equivale a decidere se il problema dei 3 corpi ristretto è integrabile per quadrature e quindi risolubile nel senso degli autori classici. Sull'inesistenza di nuovi integrali, diversi da quelli classici, rappresentati nel problema ristretto dal solo integrale di Jacobi H , vi erano dei sospetti da tempo tra i matematici, ma solo per opera di Bruns (1887) e Poincaré (1890) si arrivò ad un risultato negativo preciso. *Il teorema di Poincaré afferma precisamente che non esistono altri integrali primi "uniformi" (cioè periodici di periodo* 2π *in* ℓ, z*) delle equazioni (20) , sviluppabili in serie rispetto a* μ *in un intorno di* $\mu = 0$ *, e definiti per* L *,* G *variabili in un aperto, a parte* H *(integrale di Jacobi) e le funzioni di* H *.*

La dimostrazione di Poincaré è, a grandi linee, abbastanza semplice. Supponiamo che esista un tale integrale $\Phi = \Phi(\ell,z,L,G,\mu)$ e sviluppiamolo in serie rispetto a μ :

$\Phi = \Phi_\circ + \mu\,\Phi_1 + \mu^2\Phi_2 + \ldots$ così come abbiamo fatto per $H = H_\circ + \mu H_1 + \ldots$

allora poichè

(30) $$\frac{d\Phi}{dt} = [\,\Phi, H\,] = 0$$

sviluppando l'equazione (30) in serie di potenze di μ ed eguagliando a zero i coefficienti delle varie potenze di μ (poichè per ipotesi la (30) deve valere identicamente rispetto al parametro μ) , otteniamo le prime due di un sistema di infinite equazioni:

(31) $$[\,\Phi_\circ, H_\circ] = 0$$

(32) $$[\,\Phi_1, H_\circ] + [\,\Phi_\circ, H_1] = 0$$

La prima ci dice che Φ_o è un integrale primo del sistema generato da H_o, cioè del problema dei 2 corpi; e poichè siano nel sistema rotante, $\Phi_o = \Phi_o(L,G)$ (deve essere costante sui tori; a priori solo su quelli con numero di rotazione irrazionale, ma questi sono densi).

La (32) invece si semplifica, tenendo conto che H_o e Φ_o dipendono solo da L,G :

$$0 = \frac{\partial\Phi_0}{\partial L}\frac{\partial H_1}{\partial \ell} + \frac{\partial\Phi_0}{\partial G}\frac{\partial H_1}{\partial z} - \frac{\partial H_o}{\partial L}\frac{\partial\Phi_1}{\partial \ell} - \frac{\partial H_o}{\partial G}\frac{\partial\Phi_1}{\partial z} = \frac{\partial\Phi_0}{\partial L}\frac{\partial H_1}{\partial \ell} + \tag{33}$$

$$+\frac{\partial\Phi_o}{\partial G}\frac{\partial H_1}{\partial z} - \left[n\frac{\partial\Phi_1}{\partial \ell} - \frac{\partial\Phi_1}{\partial z}\right]$$

poichè $$\frac{\partial H_o}{\partial L} = \frac{1}{L^3} = n\ , \quad \frac{\partial H_o}{\partial G} = -1\ .$$

Allora sviluppiamo in serie di Fourier non solo la funzione perturbatrice H_1, ma anche la parte del 1° ordine della Φ :

$$\Phi_1(\ell,z,L,G) = \sum_{k_1,k_2} C_{k_1k_2}(L,G)e^{i(k_1\ell+k_2 z)} \tag{34}$$

e sostituendo questo sviluppo in serie e l'analogo (26) di H_1 nella (33); eguagliando a zero i coefficienti di ogni armonica:

$$B_{k_1k_2}(L,G)\{k_1\frac{\partial\Phi_o}{\partial L} + k_2\frac{\partial\Phi_o}{\partial G}\} - C_{k_1k_2}(L,G)\{k_1 n - k_2\} = 0 \quad . \tag{35}$$

Scegliamo allora un valore di L tale che $n = \frac{1}{L^3}$ sia razionale, $n = \frac{p}{q}$. Allora prima o poi, cioè per valori di k_1 , k_2 più o meno grandi, si avrà una risonanza $k_1 n - k_2 = 0$, e perciò la (35) si ridurrà, per quel valore risonante di L e per quegli indici k_1 , k_2 che risuonano con n , ad una condizione

(36) $$B_{k_1 k_2} = 0$$

oppure $k_1 \frac{\partial \Phi_o}{\partial L} + k_2 \frac{\partial \Phi_o}{\partial G} = 0$, cioè poichè $k_2 = n\, k_1$:

(37) $$\frac{\partial \Phi_o}{\partial L} + n \frac{\partial \Phi_o}{\partial G} = 0 \; .$$

Consideriamo allora l'integrale di Jacobi per $\mu = 0$, $H_o = - \frac{1}{2L^2} - G$; ricavando da esso G troviamo che Φ_o si può esprimere come funzione di L, H_o:

$$\Phi_o(L, - \frac{1}{2L^2} - H_o) = \Psi(L,H_o)$$

dove però la dipendenza da L è data da:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial L}(L,H_o) = \frac{\partial \Phi_o}{\partial L} + \frac{1}{L^3} \frac{\partial \Phi_o}{\partial G} = \frac{\partial \Phi_o}{\partial L} + n \frac{\partial \Phi_o}{\partial G}$$

cioè $\frac{\partial \Psi}{\partial L} = 0$ per ogni risonanza n per cui vale la (37). Perciò *se per ogni risonanza $n = p/q$ esistono termini risonanti $B_{k_1 k_2}$ ($k_1 = hq$, $k_2 = hp$) non nulli,* cioè non vale la (36), deve valere la (37) e quindi $\frac{\partial \Psi}{\partial L} = 0$; ma poichè le risonanze sono dense nel dominio di Delaunay (gli L tali che

$\frac{1}{L^3}$ è razionale sono densi) ciò significa che (sempre nel dominio di Delaunay) $\frac{\partial\Psi}{\partial L} \equiv 0$ cioè

$$\Phi_o = \Psi\,(L,H_o) = f(H_o)\ . \tag{38}$$

Ma se $\Phi_o = f(H_o)$, allora $\Phi - f(H)$ è un integrale primo nullo per $\mu = 0$ cioè $\Phi - f(H) = \mu\ \Phi'$,

con Φ' un integrale primo. Poichè però il ragionamento che ci conduce a $\Phi_o = f(H_o)$ non dipende affatto da Φ ma solo dallo sviluppo in serie di Fourier della funzione perturbatrice, cioè dai coefficienti $B_{k_1 k_2}$, anche $\Phi'_o = f\ (H_o)$ e perciò

$$\Phi - f(H) - \mu\ f\ (H) = \mu^2\ \Phi''$$

è un integrale primo a cui si applica lo stesso ragionamento ... per induzione si conclude perciò che $\Phi = F(H,\mu)$, con F definita per valori abbastanza piccoli di μ da una serie di cui si può verificare la convergenza.

Perciò se per ogni risonanza (o almeno per "quasi ogni risonanza", cioè per un insieme denso di risonanze) esistono termini risonanti non nulli, non ci sono altri integrali primi che l'hamiltoniana H (questa affermazione vale anche per problemi hamiltoniani del tutto diversi da quello dei 3 corpi!). Che i termini risonanti ci siano va verificato, ma non ci soffermiamo su ciò (sarebbe lungo). Ciò che conta è che questa dimostrazione spiega le difficoltà relative alle risonanze e ai piccoli divisori incontrate dagli astronomi, mostrando, come dice Poincaré, che "Le difficoltà che si incontrano in meccanica celeste a causa dell'esistenza dei piccoli divisori e delle commensurabilità approssimate dai moti medi sono connesse con la vera natura delle cose e non possono essere evitate".

Bibliografia:

H. Poincaré cit.