§ 3. FORMALISMO HAMILTONIANO E VARIABILI AZIONE - ANGOLO.

Ritorneremo più avanti alla meccanica settecentesca, poichè ora ci servono gli strumenti ottocenteschi di *Cauchy, Hamilton, Jacobi, Liouville* per trovare le opportune "*variabili angolo*" sui tori $T(E,J)$ nel dominio di Delaunay.

Il metodo di Hamilton consiste nel cercare una *funzione generatrice* $W = W(r, \theta, L, G)$ che definisca implicitamente una *trasformazione canonica* con le relazioni

$$(10) \qquad \ell = \frac{\partial W}{\partial L} \qquad g = \frac{\partial W}{\partial G} \qquad p_r = \frac{\partial W}{\partial r} \qquad p_\theta = \frac{\partial W}{\partial \theta}$$

in modo che nelle nuove coordinate (ℓ, g, L, G) le equazioni di Hamilton (5) si scrivano ancora nella forma Hamiltoniana

$$(11) \qquad \dot{\ell} = \frac{\partial K}{\partial L} \qquad \dot{g} = \frac{\partial K}{\partial G} \qquad \dot{L} = -\frac{\partial K}{\partial \ell} \qquad \dot{G} = -\frac{\partial K}{\partial G}$$

dove K è H scritta nelle coordinate ℓ, g, L, G .

Il metodo di Jacobi per trovare W e al tempo stesso per semplificare l'espressione della K (e quindi le equazioni (11)) consiste nel risolvere *l'equazione di Hamilton - Jacobi* che in questo caso (tenendo già conto dell'integrale dell'energia) si riduce a :

$$(12) \qquad H\left(r, \frac{\partial W}{\partial r}, \frac{\partial W}{\partial \theta}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{2r^2}\left(\frac{\partial W}{\partial \theta}\right)^2 + \phi(r) = E(L,G)$$

perciò le equazioni (11) si riducono a : $\dot{L} = \dot{G} = 0$, $\dot{\ell} = \frac{\partial E}{\partial L}(L,G)$, $\dot{g} = \frac{\partial E}{\partial G}(L,G)$ cioè ad una forma simile alla (8) poichè le frequenze $\dot{\ell}, \dot{g}$

sono costanti per L, G fisso.

Per risolvere la (12) si "*separa*" la variabile θ ponendo $\frac{\partial W}{\partial \theta} = p_\theta = J = G$ e quindi ricavando $\frac{\partial W}{\partial r} = \dot{r}$ come nella "*legge oraria*"

$$\frac{\partial W}{\partial r} = \dot{r} = \pm \sqrt{2E(L,G) - 2\phi(r) - \frac{G^2}{r^2}}$$

da cui

$$W = G \pm \int_{r}^{r} \sqrt{2E(L,G) - 2\phi(s) - \frac{G^2}{s^2}}\, ds \qquad \pm \text{ secondo che } \dot{r} \gtrless 0 . \tag{13}$$

A questo punto resta solo da verificare che ℓ, g definite dalle (10) sono veramente "variabili angolo" cioè che quando ℓ (oppure g) aumenta di 2π, le vecchie variabili $r, \theta, \dot{r}, \dot{\theta}$ ritornano allo stesso valore tranne al più θ che essendo a sua volta un angolo può aumentare di un multiplo di 2π.

A questo scopo poniamo $E(L,G) = E(L)$: allora

$$g = \pm \int_{r_\circ}^{r} \sqrt{2E(L) - 2\phi(s) - \frac{G^2}{s^2}}^{\,-1} \left(-\frac{G}{s^2}\right) ds \tag{14}$$

è una costante, $\dot{g} = \frac{\partial E}{\partial G} = 0$ e perciò $g = \theta(r_\circ)$ è una direzione in cui r diventa uguale all'estremo di integrazione fissato. Per $\phi(r) = -\frac{1}{r}$ l'integrale (14) è integrabile in termini finiti mediante un arcocoseno e perciò si ricava *in termini finiti la legge della traiettoria:*

$$(15) \qquad r = G^2 [1 + \sqrt{1+2E(L)G^2} \cos(\theta - g)]^{-1}$$

dalla quale è ovvio che g è una variabile angolo; se si pone $r_\circ = \frac{1}{1+e}$, $e = \sqrt{1+EG^2}$, g si indica col nome di *argomento del pericentro.*

D'altro canto $\dot{\ell} = \frac{dE}{dL}(L) = n(L)$ è una costante, e perciò se si vuole che ℓ sia una variabile angolo occorre che n sia il *moto medio,* cioè la velocità angolare θ mediata su $[0, 2\pi]$. Il valore del moto medio è calcolabile poichè $\frac{r^2}{2}\dot{\theta} = \frac{J}{2}$ è la *velocità areolare* e quindi il tempo in cui l'ellisse (15) (nel dominio di Delaunay $0 < e < 1$) è percorsa per intero è $\frac{2\pi\, a\, b}{J} = \frac{2\pi G^4}{(1-e^2)^{3/2}} \cdot \frac{1}{G} = \frac{\pi}{\sqrt{-2E^3}}$, perciò

$n(L) = \frac{2\pi}{\pi} \sqrt{-2E^3} = (-2E)^{3/2}$ (3^a *legge di Keplero*) da cui ricavo l'equazione:

$$(16) \qquad \frac{dE(L)}{dL} = \dot{\ell} = (-2E)^{3/2}$$

la cui soluzione si ottiene separando le variabili, $E(L) = -\frac{1}{2L^2}$; perciò $\ell = n(t-t_\circ) = \frac{1}{L^3}(t-t_\circ)$ è *l'anomalia media* che è una variabile angolo, il cui aumento di 2π fa percorrere esattamente 1 volta un'orbita ellittica.

Che le orbite siano periodiche è soddisfatto automaticamente sia per la (15), sia perchè le equazioni differenziali per le variabili angolo ℓ, g sono

$$(17) \qquad \dot{\ell} = \frac{1}{L^3} \qquad \dot{g} = 0$$

e perciò $\frac{\omega_2}{\omega_1} = 0$ è razionale per ogni L,G e perciò per ogni toro $T(E,J) = T(-\frac{1}{2L^2}, G)$ nel dominio di Delaunay.

L'esistenza di variabili "*azione-angolo*" come ℓ,g,L,G non è caratteristica della "*legge di Newton*" $\phi(r) = -\frac{1}{r}$, ma discende solo dall'esistenza di due integrali primi E,J, come riconobbe Liouville (1849) : ciò che invece deriva dalla forma molto particolare delle equazioni del problema dei due corpi gravitazionale è che i numeri di rotazione siano sempre razionali, cioè che tutti i tori siano percorsi con moti periodici.

Infatti si può dimostrare (*Bertrand, 1873*) che *se il dominio di Delaunay* è (non vuoto e) *unione di sole orbite periodiche, allora* $\phi(r)$ *è la legge di Newton* $-\frac{K}{r}$ *oppure quella di Hoohe* $K^2 r^2$ (K costante).

Le variabili (ℓ,g,L,G) sono note come "*variabili di Delaunay*", ma l'uso delle variabili ℓ, g risale a Keplero, come risale a Keplero l'equazione "di Keplero " : $\ell = u - e \sin u$ che consente, passando attraverso la variabile ausiliara u (" anomalia eccentrica") di trovare coordinate cartesiane o polari del corpo orbitante in funzione di ℓ,g,L,G.

L'impiego di questi strumenti consentì subito a Keplero di formulare predizioni sulle posizioni dei pianeti (specie Marte) molto più precise di quelle basate sugli epicicli. Tuttavia la sintesi Newtoniana tra leggi di Keplero e teoria della gravitazione consentì di aprire un campo di ricerca più vasto: se neppure le ellissi bastano a spiegare il moto dei pianeti in modo perfetto, specie se si formulano predizioni a lunga scadenza, era possibile spiegare le "diseguaglianze" dei moti reali rispetto ai moti Kepleriani puri come effetto dell'attrazione dei pianeti tra loro?

Bibliografia:

V. Arnold *"Les Methodes Mathématiques de la Mécanique classique"* Ed. Mir, Mosca 1976.

H. Goldstein *"Classical Mechanics"* Addison-Wesley, Reading, Mass. 1950 .