6 - Fibrati associati ad un fibrato principale

Sia $\mathfrak{F}$ una categoria di struttura; sia $\bar{G}$ un gruppo topologico e sia $\mathfrak{F}_{\bar{G}}$ la categoria degli spazi affini destri di $\bar{G}$.

(6.1) Osservazione. Se $\bar{G}$ opera a sinistra su uno spazio topologico F, mediante l'applicazione $\sigma : \bar{G} \times F \to F$, allora $\bar{G}$ opera a destra su F mediante l'applicazione continua

$$\sigma : \bar{G} \times F \to F,$$

data da

$$\sigma' : (g,f) \to \sigma(g^{-1},f) \ .$$

(6.2) Proposizione

Sia $\mu \equiv (P, \amalg, B, Y)$ un fibrato principale topologico destro di gruppo strutturale $\bar{G}$.

Sia F un oggetto di $\mathfrak{F}$, sul quale $\bar{G}$ opera a sinistra, mediante l'applicazione

$$\sigma : \bar{G} \times F \to F,$$

tale che

$$\sigma_g \in \mathrm{Aut}(F) \ , \qquad \forall g \in \bar{G} \ .$$

a) Sia $Q \equiv P \times F_{/\bar{G}}$ lo spazio topologico quoziente relativo alla relazione di equivalenza indotta dalle orbite di $\bar{G}$ il quale opera a destra su $P \times F$ mediante l'applicazione continua

$$T \times \sigma' : P \times F \to P \times F.$$

b) Sia $\tilde{\amalg} : P \times F \to Q$ la proiezione canonica.

Sia $\tilde{\pi} : Q \to B$ l'unica applicazione tale che il seguente diagramma sia commutativo:

$$\begin{tikzcd} P \times F \arrow[r, "\overset{1}{\pi}"] \arrow[d, "\tilde{\perp\!\!\perp}"'] & P \arrow[d, "\perp\!\!\perp"] \\ Q \arrow[r, "\tilde{\pi}"'] & B \end{tikzcd}$$

c) Sia $C : P \to \mathrm{Ogg}\,\mathfrak{F}$ l'applicazione costante $C : p \to F$.

Sia $\tilde{\gamma} : Q \to \mathrm{Ogg}\,\mathfrak{F}_{\bar{G}}$ l'applicazione indotta dalla famiglia di biiezioni

$$\{t_{q,f} : \tilde{\perp\!\!\perp}^{-1}(q) \to \perp\!\!\perp^{-1}(\tilde{\pi}(q))\}_{q \in Q,\, f \in \overset{2}{\pi}(\tilde{\perp\!\!\perp}^{-1}(q))}$$

date da $\quad \{t_{q,f} : (p,f) \to p\}.$

Sia $\tilde{J} : B \to \mathrm{Ogg}\,\mathfrak{F}$ l'applicazione indotta dalla famiglia di biiezioni

$$\{s_{b,p} : \tilde{\pi}^{-1}(b) \to F\}_{p \in \perp\!\!\perp^{-1}(b)}$$

date da $\quad \{s_{b,p} : [p,f] \to f\}_{p \in \perp\!\!\perp^{-1}(b)}$.

d) Allora $\phi \equiv (P\times F, \overset{1}{\pi}, P, C)$ è un fibrato topologico con struttura in $\mathfrak{F}$, di fibra tipo F;

$\nu \equiv (P\times F, \tilde{\perp\!\!\perp}, Q, \tilde{y})$ è un fibrato (principale destro) topologico con struttura in $\mathfrak{F}_{\bar{G}}$;

$\psi \equiv (Q, \tilde{\pi}, B, \tilde{J})$ è un fibrato topologico con struttura in $\mathfrak{F}$.

c) Inoltre $\overset{1}{\pi}$ è un omomorfismo di ν in μ, su $\tilde{\pi}$;

$\tilde{\perp\!\!\perp}$ è un omomorfismo di ϕ in ψ, su $\perp\!\!\perp$.

Tale risultato suggerisce la seguente definizione.

(6.3) Definizione

Sia $\mu \equiv (P, \amalg, B, y)$ un fibrato principale topologico destro di gruppo strutturale $\bar{G}$.

Sia F un oggetto di $\mathfrak{F}$.

Si dice <u>"fibrato topologico, di fibra di tipo F, associato a μ"</u> ogni coppia

$$(\psi, \tilde{\amalg}) ,$$

dove $\psi \equiv (Q, \tilde{\pi}, B, \tilde{J})$ è un fibrato topologico con struttura in $\mathfrak{F}$, di fibra tipo F e $\tilde{\amalg} : P \times F \to Q$ è un'applicazione continua, tali che il seguente diagramma sia commutativo:

$$\begin{array}{ccc} P \times F & \xrightarrow{\pi^{1}} & B \\ {\scriptstyle\tilde{\amalg}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\amalg} \\ Q & \xrightarrow[\tilde{\pi}]{} & B \end{array}$$

7 - Relazione tra fibrati associati e ricostruzione di fibrati

Sia $\mathfrak{F}$ una categoria di struttura. Sia F un oggetto di $\mathfrak{F}$ e supponiamo che

$$\bar{G} \equiv \mathrm{Aut}(F)$$

sia un gruppo topologico.

Sia poi $\mathfrak{F}_{\bar{G}}$ la categoria degli spazi affini destri di $\bar{G}$.

Si osservi ora che un cociclo a valori in $\bar{G} \equiv \mathrm{Aut}(F)$, relativamente alla categoria $\mathfrak{F}$, è anche un cociclo a valori in $\mathrm{Aut}(\bar{G})$, relativamente alla categoria $\mathfrak{F}_{\bar{G}}$, in quanto $\bar{G}$ opera a destra su se stesso. Pertanto, da un tale cociclo si può ricostruire sia un fibrato con struttura in $\mathfrak{F}$, sia un fibrato (principale) con struttura in $\mathfrak{F}_{\bar{G}}$.